SZENT ISTVÁN EGYETEM
GAZDASÁGI, AGRÁR- ÉS EGÉSZSÉGTUDOMÁNYI KAR

Dr. Szakács Attila

GAZDASÁGI MATEMATIKA 1.

ANALÍZIS

Segédlet önálló munkához

4. átdolgozott, bővített kiadás

Békéscsaba, 2014

Lektorálták:

DR. PATAY ZOLTÁN
főiskolai tanár,
a matematikai tudomány kandidátusa

HÓDINÉ SZÉL MARGIT
főiskolai docens

Kiadja
Szent István Egyetem Gazdasági, Agrár- és Egészségtudományi Kar,
Békéscsaba, 2014.

Felelős kiadó
Dr. Bíró Tibor, egyetemi docens, mb. dékán

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A mindennapi élet évezredek óta elképzelhetetlen gazdasági tevékenységek nélkül. Szinte ősidők óta létezik a csere fogalma, mindig voltak kereskedők és árusok. A közgazdasági fogalmak évszázadokon át leírhatóak voltak a matematika egyszerű nyelvezetével, a gazdaság szereplői számára elegendőek voltak az egész és a tört számok a rajtuk végzett műveletekkel ahhoz, hogy bizonyos tevékenységeket (számlák vezetése, árak kalkulálása, kamatszámítás) elemezhessék. Azonban a közgazdaságtan fejlődése a tizennyolcadik században már túlnőtt ezen, és a különböző gazdasági kölcsönhatások elemzésére a közgazdászoknak egyre gyakrabban matematikai módszerek alkalmazásához kellett folyamodniuk. Például a keresleti görbék explicit ábrázolása, különböző közgazdasági szélsőérték feladatok megoldása ma már elképzelhetetlen a differenciálszámítás eszközeinek alkalmazása nélkül. Léon Warras volt például az, aki felállította és meg is oldotta a piaci kereslet és kínálat általános egyensúlyára vonatkozó első egyenletrendszert.

Napjainkban az alapvető matematikai műveltség, a klasszikus és a modern – a számítógéppel is egyre jobban támogatott – matematikai modellezés elengedhetetlen és nélkülözhetetlen minden közgazdász hallgató számára.

A jegyzet nagyobb részében a matematikának azt a részét tárgyalom, amit a szakirodalom ***matematikai analízis*** néven ismer. Összegyűjtöttem benne a több évtizedes – s azon belül az 1994 óta a békéscsabai közgazdasági képzésben szerzett – oktatási tapasztalataimat.

Munkám során az eddig széles körben használt Dr. Csernyák László által szerkesztett Analízis jegyzetet valamint a Sydsaeter, Knut és Hammond, Peter által írt Matematika közgazdászoknak jegyzet magyar fordítását vettem alapul.

A klasszikus fogalmak ismertetését követően igyekeztem példák segítségével szemléltetni azokat, a matematikai elemzéseken túl a közgazdasági alkalmazásokat is bemutatni esetenként számítástechnikai eszközök és módszerek felhasználásával.

A jegyzetet folyamatosan javítani és bővíteni kívánom, ezért minden észrevételnek, javító szándékú javaslatnak örülök, és szívesen látom azokat (a szakacs.attila@gk.szie.hu vagy a szakacs.attila.dr@gmail.com címen).

Békéscsaba, 2014. szeptember

A szerző

1. Logikai alapismeretek

A matematika – mint minden más tudományág – megalapozásához (kiépítéséhez, az „induláshoz”) szükségünk van olyan fogalmakra, amelyek más fogalmakkal nem definiálhatóak: ezeket nevezzük ***alapfogalmaknak*** (pl.: halmaz, elem, egy elem eleme egy halmaznak, tulajdonság, pont, egyenes, sík). Alapfogalomként általában a „legegyszerűbb” fogalmakat szokás választani.

A logikában és a matematikában ilyen alapfogalom az ***ítélet, (állítás, kijelentés)***. A logikai állításról mindig egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy hamis, (azaz egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz is meg hamis is, és ha nem igaz, akkor hamis – harmadik lehetőség nincs). Jelölése: *A, B, C*.... Azt, hogy egy ítélet igaz-e vagy hamis, az adott ítélet ***logikai értékének*** nevezzük. Az igaz logikai értéket 1, a hamis logikai értéket 0-val fogjuk jelölni. Matematikai ítélet például az ***axióma*** (bizonyítás nélkül igaznak elfogadott állítás) és a ***tétel*** (amelynek igaz voltát az axiómák és korábban bizonyított tételek felhasználásával bizonyítjuk).

az ítélet (állítás) fogalma

logikai értéke

axióma

tétel

A logikai állításokat különböző ***műveletek*** kapcsolhatják össze, amelyeket mi az alábbiakban ún. igazságtáblájukkal is megadunk. Ezek a műveletek a következők.

1.1 Definíció Az *A* állítás ***negációja (tagadása)*** a „*nem A”* állítás, amely abban és csak abban az esetben igaz, ha *A* hamis. Jele: $\overline{A}$, igazságtáblája:

$\overline{A}$

negáció, tagadás

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

1.2 Definíció Az *A* és *B* logikai állítások ***diszjunkciója*** az „*A vagy B”* állítás, ami abban és csak abban az esetben hamis, ha mindkét állítás hamis. Jele: $A \vee B$, igazságtáblája:

$A \vee B$

diszjunkció, „vagy”

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \wedge B$
konjunkció,
„és”

1.3 Definíció Az A és B logikai állítások ***konjunkciója*** az *„A és B”* állítás, ami abban és csak abban az esetben igaz, ha mindkét állítás igaz. Jele: $A \wedge B$, igazságtáblája:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A fentieken kívül meg kell említeni még két műveletet, két „szót”, amelynek szintén fontos szerepe van a matematikában, – ezek a ***minden*** és a ***létezik.***

A két művelet nem más, mint a konjunkció és a diszjunkció általánosítása végtelen sok tényezőre. Kezdjük egy példával. Nézzük az alábbi végtelen sok kifejezést tartalmazó, összetett állítást:

„a $2-$ *páratlan prímszám, a* $3-$ *páratlan prímszám, az* $5-$ *páratlan prímszám ...”.*

Ez rövidebben így fogalmazható meg:

„Minden prímszám páratlan”.

Nyilvánvalóan ez az állítás hamis, mert *létezik* (legalább egy) olyan prímszám (mégpedig a 2), amely nem páratlan.

$\forall x T(x)$
univerzális kvantor,
„minden”

1.4 Definíció Legyen H egy alaphalmaz és T egy tulajdonság. Ekkor a ***„minden H-beli x elem rendelkezik a T tulajdonsággal"*** állítás abban és csak abban az esetben hamis, ha a H halmaznak van (legalább egy) olyan eleme, amely nem rendelkezik a T tulajdonsággal. (Ez tulajdonképpen a konjunkció általánosítása).

Jele: $\forall x T(x)$.

$\exists x T(x)$
ekzisztenciális kvantor,
„létezik”

1.5 Definíció Legyen H egy alaphalmaz és T egy tulajdonság. Ekkor a ***„létezik olyan H-beli x elem, amely rendelkezik a T tulajdonsággal"*** állítás abban és csak abban az esetben hamis, ha a H halmaz egyetlen eleme sem rendelkezik a T tulajdonsággal. (Ez tulajdonképpen a diszjunkció általánosítása). Jele: $\exists x T(x)$.

Könnyen belátható, hogy a fentebb definiált műveletekre nézve teljesülnek az alábbi azonosságok. Tetszőleges *A, B* és *C* állításokra:

1) $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$;

(kommutativitás)

2) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$;

(asszociativitás)

3) $A \vee A = A$, $\qquad A \wedge A = A$; $\qquad$ (idempotencia).

4) $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, $\quad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

(disztributivitás)

Létezik továbbá két olyan O és I kitüntetett állítás – ezek a hamis és az igaz állításokat jelölik –, amelyekre

5) $O \vee A = A$, $\qquad I \wedge A = A$;

6) $I \vee A = I$, $\qquad O \wedge A = O$;

7) $A \vee \overline{A} = I$, $\qquad \overline{A} \wedge A = O$.

A logikai állítások halmazán értelmeztünk tehát három műveletet (negáció, diszjunkció, konjunkció), létezik továbbá két kitüntetett állítás: az O és az I. Ezek a felsorolt 14 azonosságnak tesznek eleget – az ilyen halmazokat a rajtuk értelmezett műveletekkel együtt ***Boole-algebrának*** nevezzük (George Boole (1815-1864) angol matematikus tiszteletére). Megjegyezzük, hogy a számítógép működési elvének alapjai a Boole-algebra azonosságain, tételein nyugszanak.

A fenti azonosságokon kívül megemlítjük még az ún. ***de Morgan-féle*** azonosságokat: minden A és B állításra:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}, \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

Az első azonosság igaz voltát szemlélteti az alábbi példa. A sikeres gazdaságmatematika vizsgához elméleti és gyakorlati részből is – külön-külön – legalább 50%-os teljesítményt kell elérni. Mikor sikertelen tehát a vizsga? Ha vagy az elméleti részből, vagy a gyakorlati részből, vagy egyikből sem sikerült 50%-os teljesítményt elérnünk.

Beszélnünk kell még két olyan logikai műveletről, amelyek a matematikai tételek túlnyomó többségének megfogalmazásaiban szerepelnek.

1.6 Definíció Az A és B logikai állítások ***implikációja*** a „*ha A, akkor B”* állítás, ami abban és csak abban az esetben hamis, ha A igaz és B hamis. Más szavakkal: *A-ból következik B,* ami azt jelenti, hogy ha A igaz, akkor B is igaz. Jele: $A \Rightarrow B$, igazságtáblája:

$A \Rightarrow B$

implikáció

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ez a definíció első ránézésre kissé furcsának tűnik. Hogyan lehet igaz az $A \Rightarrow B$ állítás abban az esetben, amikor az A állítás hamis és a B igaz? Erre egyszerűen az a válasz, hogy a definíció alapján. Az implikáció definíciójának helyességét szemlélteti az alábbi példa. Milyen esetben nem mondok igazat az alábbi kijelentésemmel: „ha vasárnap jó idő lesz, akkor elmegyek kirándulni”? Nyilván csak akkor, ha vasárnap jó az idő, és én mégsem mentem el kirándulni.

elégséges feltétel

szükséges feltétel

1.7 Definíció Tegyük fel, hogy az A állításból következik a B állítás. Ekkor A-t a B ***elégséges feltételének***, és ugyanekkor B-t az A ***szükséges feltételének*** nevezzük.

Például, a főiskolai diploma megszerzésének *szükséges* feltétele a középfokú C típusú nyelvvizsga bizonyítvány. Tehát valakiről *elegendő* azt tudnunk, hogy rendelkezik közgazdasági főiskolai diplomával, ebből következtethetünk a nyelvvizsga bizonyítvány meglétére is. Viszont akinek nincs nyelvvizsga bizonyítványa, az nem kaphat diplomát. Az utóbbi gondolatmenetet támasztja alá az alábbi azonosság: minden A és B logikai állításra

$$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A},$$

ami az indirekt bizonyítási eljárás alapját is képezi.

1.8 Példa Igazoljuk a fenti azonosságot!

Az azonosság igazolására elkészítjük az egyenlőség bal és jobb oldalán lévő kifejezések igazságtábláját. Esetünkben a bal oldal az $A \Rightarrow B$ implikáció. Készítsük el a jobb oldali kifejezés igazságtábláját! Ehhez a tábla első két oszlopában felvesszük a kifejezésben szereplő változók (esetünkben A és B) összes lehetséges értékeit, majd a következő két oszlopban a $\overline{B}$ és a $\overline{A}$ összes megfelelő értékeit, és végül az utolsó oszlopban képezzük a $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ implikációt:

A	B	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

Amint látjuk, az utolsó oszlop megegyezik az $A \Rightarrow B$ implikáció definíciójával – ezzel azonosságunkat igazoltuk.

1.9 Definíció Az A és B logikai állítások ***ekvivalenciája*** az „*A akkor és csak akkor, ha B*” állítás, ami abban és csak abban az esetben igaz, ha az A és a B állítások logikai értéke megegyezik. Jele: $A \Leftrightarrow B$, igazságtáblája:

$A \Leftrightarrow B$

ekvivalencia

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

E művelettel kapcsolatban meg kell említeni az alábbi azonosságot: minden A és B logikai állításra

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\,.$$

Megjegyezzük, hogy a továbbiakban az „és”, a „vagy”, a „minden”, a „létezik”, a „ha”, az „akkor”, az „akkor és csak akkor” szavakat a fentebb definiált értelemben fogjuk használni.

A fejezetet egy érdekes történettel zárjuk, amely talán jól szemlélteti, hogy a matematika nyelvezetében mennyire fontos a pontos megfogalmazás.

Egy csillagász, egy fizikus és egy matematikus utazik a vonaton. Skócián keresztül haladva a mezőn meglátnak egy legelésző birkanyájat. Megszólal a csillagász: „Skóciában feketék a birkák.” A fizikus pontosít: „Skóciában léteznek fekete birkák.” Mire a matematikus: „Skóciában létezik egy birkanyáj, amelyben minden birkának legalább az egyik oldala fekete.”

Ellenőrző kérdések az 1. fejezethez

E.1.1 Fogalmazzuk meg a negáció definícióját!

E.1.2 Fogalmazzuk meg a konjunkció definícióját!

E.1.3 Fogalmazzuk meg a diszjunkció definícióját!

E.1.4 Fogalmazzuk meg a szükséges feltétel definícióját!

E.1.5 Fogalmazzuk meg az elégséges feltétel definícióját!

E.1.6 Fogalmazzuk meg az implikáció definícióját!

E.1.7 Fogalmazzuk meg az ekvivalencia definícióját!

E.1.8 Hozzunk fel példát olyan A és B állításokra, amelyben A elégséges feltétele B-nek!

E.1.9 Hozzunk fel példát olyan A és B állításokra, amelyben A szükséges feltétele B-nek!

E.1.10 Igazoljuk a logikai állításokra vonatkozó 2) azonosságot!

E.1.11 Igazoljuk a logikai állításokra vonatkozó 3) azonosságot!

E.1.12 Igazoljuk a de Morgan-féle azonosságokat!

E.1.13 Igazoljuk az indirekt bizonyítási eljárás alapjául szolgáló logikai azonosságot!

E.1.14 Igazoljuk az ekvivalencia és az implikációval kapcsolatos azonosságot!

Gyakorló feladatok az 1. fejezethez

G.1.1 Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igaz-e vagy hamis:

a) Minden négyzet rombusz
b) Minden rombusz négyzet.
c) Ha egy négyszög rombusz, akkor az négyzet.
d) Ha egy négyszög négyzet, akkor az rombusz.
e) Minden 5-re végződő természetes szám osztható 5-tel.
f) Minden 5-tel osztható természetes szám 5-re végződik.
g) Ha egy természetes szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel.
h) Ha egy természetes szám 5-tel osztható, akkor 5-re végződik.

G.1.2 Tekintsük a következő állításokat:

A: Megszereztük a félév végi aláírást gazdasági matematikából.

Z: Teljesítettük a zárthelyi dolgozat követelményeit (legalább 30%-os eredmény).

H: Teljesítettük a házi feladat követelményeit (legalább 50%-os eredmény).

K: Megszereztük a kreditpontot gazdasági matematikából.

V: Sikerült a vizsgánk (legalább elégséges osztályzat) gazdasági matematikából.

Fogalmazzuk meg a következő kijelentéseket, értelmezzük azokat! Vannak-e közöttük egyenlők? Állapítsuk meg, mi minek a szükséges, illetve elégséges feltétele!

a) $A \Leftrightarrow (Z \wedge H)$ b) $(Z \wedge H) \Rightarrow A$ c) $\overline{A} \Rightarrow (\overline{Z} \vee \overline{H})$

d) $\overline{Z \wedge H} = \overline{Z} \vee \overline{H}$ e) $V \Rightarrow K$ f) $\overline{A} \Rightarrow \overline{V}$

g) $\overline{K} \Rightarrow \overline{V}$ h) $\overline{Z} \Rightarrow \overline{K}$ i) $\overline{H} \Rightarrow \overline{K}$

G.1.3 A G.1.2 feladat figyelembevételével döntsük el az alábbi állítások igaz vagy hamis voltát:

a) Ha nem teljesítjük a házi feladatot, akkor nem szerezzük meg a kreditpontot.
b) A sikeres vizsga a kreditpont megszerzésének szükséges feltétele.
c) A félév végi aláírás megléte a sikeres vizsga szükséges feltétele.
d) Ha megvan a félév végi aláírásunk, akkor sikeres a vizsgánk.
e) Ha megvan a kreditpontunk, akkor teljesítettük a zárthelyi dolgozatot.

G.1.4 Döntsük el az alábbi állítások igaz vagy hamis voltát:

a) Ha a szám nullára végződik, akkor páros.

b) Létezik nullára végződő páros szám.

c) Minden nullára végződő szám páros szám.

d) Ha a szám páros, akkor nullára végződik.

e) Ha szám nullára végződik, akkor osztható tízzel.

f) Ha szám tízzel osztható, akkor nullára végződik.

g) Minden tízzel osztható szám nullára végződik.

h) Ha a szám ötre végződik, akkor osztható öttel.

i) Ha szám osztható öttel, akkor ötre végződik.

j) Létezik olyan öttel osztható szám, amely ötre végződik.

G.1.5 Állapítsuk meg az alábbi állítások logikai értékét, fogalmazzuk meg az állítások tagadását:

a) Minden valós szám négyzete pozitív.

b) Minden y valós számhoz létezik olyan x valós szám, amelyre $y > x^2$.

c) Minden pozitív y valós számhoz létezik olyan x valós szám, amelyre $x^2 \leq y$.

2. Halmazelméleti alapismeretek

Mindennapjaink során is egyre gyakrabban fordul elő a halmaz szó használata, egyebet sem teszünk, mint adott dolgokat bizonyos szempontok (tulajdonságok) szerint azonos vagy éppen különböző osztályokba sorolunk. Beszélhetünk például egy adott főiskola első évfolyamos nappali tagozatos hallgatóiról.

A halmaz fogalma jelentős szerepet játszik a matematikában, mivel belőle kiindulva axiomatikus úton e tudománynak minden ága felépíthető. A jegyzet céljainak megfelelően nem követhetjük ezt az utat, azonban az alapvető fogalmak és összefüggések tárgyalása mindenképpen szükséges a továbbiakhoz.

Ahogy az előző fejezetben is említettük, a halmaz, az elem, egy elem eleme egy halmaznak (jele: $x \in A$) és a tulajdonság fogalmakat alapfogalomnak tekintjük a matematikában. A halmazokat általában nagybetűkkel, az elemeiket pedig kisbetűkkel jelöljük. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy egy halmaz elemei is halmazok, akkor a halmaz helyett halmazrendszerről beszélünk: ilyenkor ezt a halmazt esetleg írott nagybetűvel, elemeit nyomtatott nagybetűkkel, ezek elemeit pedig kisbetűkkel jelöljük, hogy a közöttük lévő hierarchiát érzékeltessük.

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, ***üres halmaznak*** nevezzük, és $\emptyset$ szimbólummal jelöljük. Ha *A* egy halmaz és *T* egy olyan tulajdonság, amely minden *x* dologra (elemre) vagy igaz, vagy hamis, akkor létezik egy olyan

$$\{x \in A : T(x)\} \text{ vagy } \{x \in A \mid T(x)\}$$

módon jelölt halmaz, amelynek *x* pontosan akkor eleme, ha $x \in A$ és *T(x)* igaz. A halmazt megadhatjuk még elemeinek felsorolásával is, például: {2, 3, 5, 7} – az egyjegyű prímszámok halmaza.

$\emptyset$ üres halmaz

halmazok megadása

2.1 Definíció Az *A* és a *B* halmaz egyenlő, ha $x \in A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in B$.

halmazok egyenlősége

A definíció alapján, például, az {1, 2, 3} és az {1, 1, 3, 2, 3} halmazok egyenlők.

2.2 Definíció Az *A* halmazt a *B* halmaz ***részhalmazának*** nevezzük, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül.

Jele: $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$

részhalmaz

2.3 Definíció A *H* halmaz összes részhalmazainak halmazát a *H* halmaz ***hatványhalmazának*** nevezzük. Jele: $\Omega(H)$. Ekkor *H*-t ***alaphalmaznak*** is szokás nevezni.

alaphalmaz

hatvány-halmaz

Például, ha $H = \{1, 2, 3\}$, akkor $\Omega(H) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, H\}$.

2.4 Feladat Bizonyítsuk be, hogy ha a H halmaz n elemből áll, akkor a H hatványhalmaza 2^n elemet tartalmaz.

Megjegyzés.

– Bármely A halmaz esetén $A \subseteq A$.

– Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor A-t a B valódi részhalmazának is szokták nevezni.

– Az üres halmaz bármely halmaznak részhalmaza.

– Jegyzetünkben a középiskolából megismert számhalmazokra az alábbi jelöléseket fogjuk alkalmazni:

N ={0, 1, 2, …} – a természetes számok halmaza;

Z ={… −2, −1, 0, 1, 2, …} – az egész számok halmaza;

Q – a racionális számok halmaza;

R – a valós számok halmaza.

A továbbiakban legyen H egy alaphalmaz, $A \subseteq H$, $B \subseteq H$.

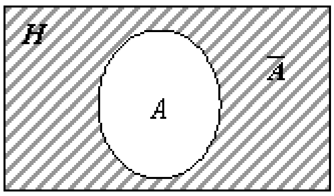
$\overline{A}$

komplementer halmaz

2.5 Definíció Az A halmaz H alaphalmazra vonatkozó ***komplementer (kiegészítő) halmazának*** azt a halmazt nevezzük, amely H-nak A-hoz nem tartozó elemeiből áll.

Jelben: $\overline{A} = \{x \in H \mid x \notin A\}$.

Az A halmaz komplementerét az alábbi ábrán (ún. Venn-diagramon) a vonalkázott rész jelöli.



2.1 ábra

$A \cup B$

unió

2.6 Definíció Az A és B halmaz ***uniójának (egyesítésének)*** azt az $A \bigcup B$ halmazt nevezzük, amelynek x akkor és csak akkor eleme, ha x az A és B közül legalább az egyiknek eleme.

Jelben: $A \bigcup B = \{x \in H \mid a \in A \quad \vee \quad x \in B\}$

Megjegyezzük, hogy a diszjunkció definíciója értelmében az $A \bigcup B$ halmaz az összes olyan elemből áll, amelyek elemei vagy A-nak, vagy B-nek, vagy mindkét említett halmaznak.

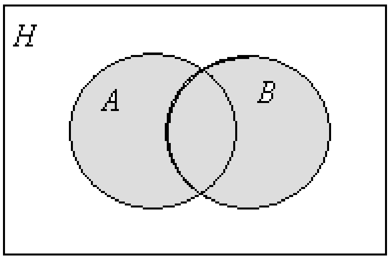
2.7 Definíció Az A és B halmaz ***metszetének (közös részének)*** azt az $A \cap B$ halmazt nevezzük, amelynek x akkor és csak akkor eleme, ha x az A-nak is és a B-nek is eleme.

Jelben: $A \cap B = \{x \in H \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

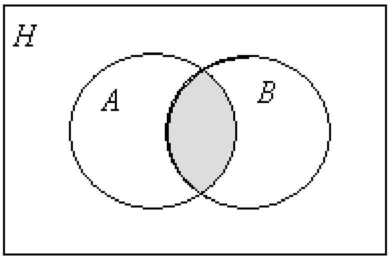
$A \cap B$

metszet

Az unió és metszet műveletét az alábbi Venn-diagramokon a sötétebb részek szemléltetik:



2.2 ábra



2.3 ábra

Könnyen belátható, hogy a fentebb definiált halmazműveletekre nézve teljesülnek az alábbi – a logikaiakhoz hasonló – azonosságok. Tetszőleges A, B és C H alaphalmazbeli halmazokra:

1) $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$;

(kommutativitás)

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(asszociativitás)

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(disztributivitás)

4) $\emptyset \cup A = A$, $\quad H \cap A = A$;

5) $H \cup A = H$, $\quad \emptyset \cap A = \emptyset$;

6) $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$; (idempotencia).

7) $A \cup \overline{A} = H$, $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Így tehát a H alaphalmaz összes részhalmazainak halmaza (a H halmaz hatványhalmaza) az unió, a metszet és a komplementer-képzés műveletére nézve Boole-algebrát alkot, amelyet ***halmazalgebrának*** nevezünk.

halmaz-algebra

A fenti azonosságokon kívül itt is megemlítjük még az ún. ***de Morgan-féle*** azonosságokat. Minden A és B adott H alaphalmazbeli halmazra:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

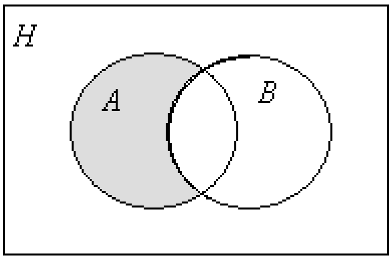
$A \setminus B$

halmazok különbsége

2.8 Definíció Az A és B halmaz $A \setminus B$ ***különbségének*** azt a halmazt nevezzük, amely az A halmaznak a B halmazba nem tartozó elemeiből áll.

Jelben: $A \setminus B = \{x \in H \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

A halmaz különbségének műveletét az alábbi Venn-diagramon a sötét rész szemlélteti.



2.4 ábra

2.9 Példa Legyen H a pozitív egyjegyű természetes számok halmaza, ezen belül A − a páros számok halmaza,
B − a páratlan számok halmaza,
C − a prímszámok halmaza, vagyis

H={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

A={2, 4, 6, 8}, B={1, 3, 5, 7, 9}, C={2, 3, 5, 7}.

Ekkor például:

$\overline{A} = B$, $B \cap C$ ={3, 5, 7}, $B \cup C$ ={1, 2, 3, 5, 7, 9}, $B \setminus C$={1, 9}.

Ellenőrző kérdések a 2. fejezethez

E.2.1 Mit értünk halmaz, illetve elem alatt?

E.2.2 Hogyan adjuk meg a halmazokat?

E.2.3 Fogalmazzuk meg a hatványhalmaz definícióját!

E.2.4 Fogalmazzuk meg a halmaz komplementerének a definícióját!

E.2.5 Fogalmazzuk meg két halmaz metszetének a definícióját!

E.2.6 Fogalmazzuk meg két halmaz uniójának a definícióját!

E.2.7 Soroljuk fel a halmazok uniójának és metszetének tulajdonságait!

E.2.8 Fogalmazzuk meg két halmaz különbségének definícióját!

E.2.9 Venn-diagramon szemléltessük az unió és a metszet disztributív tulajdonságát!

E.2.10 Venn-diagramon szemléltessük a de Morgan-féle azonosságot!

E.2.11 Venn-diagramon szemléltessük, hogy a halmazkivonás művelete nem kommutatív, nem asszociatív!

Gyakorló feladatok a 2. fejezethez

G.2.1 Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az alábbi halmazokat, állapítsuk meg azok pontos alsó és pontos felső korlátját! Van-e minimális (legkisebb), illetve maximális (legnagyobb) eleme a halmazoknak?

a) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots, 97\} = \{\text{az egy és a kétjegyű prímszámok halmaza}\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\} = \{\text{a páros számok halmaza}\}$

c) $C = \left\{ 3 + \dfrac{7}{n} \;:\; n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$

d) $D = \left\{ \dfrac{6n+1}{2n+5} \;:\; n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$

e) $E = \left\{ \dfrac{5^n + (-2)^{n+1}}{5^n} \;:\; n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$

G.2.2 Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldását valós intervallumok segítségével!

a) $x^2 - 8x + 15 \geq 0$

b) $x^2 + 2x - 24 \leq 0$

c) $\dfrac{5x-2}{4x+7} \geq 0$

d) $\dfrac{5x-2}{4x+7} \geq 1$

e) $\dfrac{4x-5}{x^2+3x-18} \geq 0$

f) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+2x-24} \leq 0$

3. Függvények

A mindennapi életben is gyakran találkozunk a függvény fogalmával, ha nem is nevezzük nevén azt. Gondoljunk csak például főiskolánk első évfolyamos hallgatóinak születésnapjaira: egy adott évben minden hallgatónak van egy és csakis egy születésnapja. Ezzel, hogy a hallgatókhoz hozzárendeltük a születésnapjukat, máris egy függvényt definiáltunk. Itt megjegyezzük, hogy lehetnek olyan hallgatók, akik születésnapja megegyezik, illetve lehetnek olyan napok, amelyeken senkinek sincs születésnapja. Akárcsak a matematikában, úgy a közgazdaságtanban is, a függvénynek nagyon fontos szerepe van. Rátérünk e fogalom ismertetésére, ennek jobb megértéséhez (és a korrekt definícióhoz) szükségünk van az alábbi néhány definícióra.

3.1 A függvény fogalma

3.1 Definíció Legyen *A*, *B* halmaz, $a \in A$, $b \in B$. Az (a,b) szimbólumot ***rendezett elempárnak*** nevezzük, ha az $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, amikor $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

rendezett elempár

3.2 Definíció Legyen *A*, *B* halmaz, $a \in A$, $b \in B$. Az *A* és *B* halmaz $A \times B$ ***Descartes szorzata*** az *A* és *B* halmazok elemeiből képzett összes rendezett elempár halmaza.

Jelben: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A; b \in B\}$ (olvasd: *A* kereszt *B*).

$A \times B$

Descartes szorzat

3.3 Példa Ha $A = \{a_1, a_2\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, akkor

$$A \times B = \{(a_1,b_1);(a_1,b_2);(a_1,b_3);(a_2,b_1);(a_2,b_2);(a_2,b_3)\}$$

és

$$B \times A = \{(b_1,a_1);(b_1,a_2);(b_2,a_1);(b_2,a_2);(b_3,a_1);(b_3,a_2)\}$$

Amint az a fenti példából is látszik $A \neq B$ esetén:

$$A \times B \neq B \times A.$$

3.4 Definíció Az $A \times B$ Descartes szorzat bármely $f \subseteq A \times B$ részhalmazát ***relációnak*** nevezzük. Ha $(a,b) \in f$, akkor *a* az *f* relációban áll *b*-vel – más szavakkal – az *f* az *a*-hoz a *b*-t ***rendeli hozzá***.

reláció

hozzá-rendelés

függvény

függvény-érték

3.5 Definíció Az $A \times B$ Descartes szorzat f részhalmazát ***függvénynek*** nevezzük, ha minden $a \in A$ elemhez legfeljebb egy olyan $b \in B$ elem létezik, amelyre $(a,b) \in f$; ekkor az $(a,b) \in f$ jelölés helyett az *f(a)=b* jelölést fogjuk alkalmazni. Ekkor *b*-t az *a* elem ***képének*** (az *a* helyen vett ***függvényértéknek,*** *a* pontbeli ***helyettesítési értéknek***), az *a*-t pedig a *b* elem ***őseképének*** nevezzük. (A függvény tulajdonképpen egyértelmű hozzárendelés.)

képhalmaz

3.6 Definíció A *B* halmazt a függvény ***képhalmazának*** nevezzük.

értelmezési tartomány

3.7 Definíció Az *f* függvény ***értelmezési tartománya*** a

$$D_f = \{a \in A \mid \text{létezik olyan } b \in B, \text{amelyre } f(a) = b\}$$

halmaz.

értékkészlet

3.8 Definíció Az *f* függvény ***értékkészlete*** az

$$R_f = \{b \in B \mid \text{létezik olyan } a \in A, \text{ amelyre } f(a) = b\}$$

halmaz.

Legyen *f* függvény $f \subseteq A \times B$. Ha $D_f = A$, akkor *A*-t a *B*-be képező függvényről beszélünk.

Jele: *f: A→B*. Más szavakkal:

f: A→B

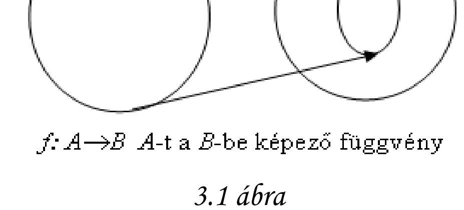
*A-**t a** B-**be képező függvény***

*A-**t a** B-**re képező függvény***

3.9 Definíció Az *f: A→B* ***(A-t a B-be képező függvény)*** az $A \times B$ Descartes szorzat olyan részhalmaza, amelyre minden $a \in A$ elemhez egy és csakis egy olyan $b \in B$ elem létezik, amelyre $(a,b) \in f$, (vagy, ahogy fentebb említettük, *f(a)=b*).

Ha $D_f = A$ és $R_f = B$, akkor *f*-et az ***A-t a B-re képező függvénynek*** nevezzük.

Az alábbi két ábra az *f: A→B* *A*-t a *B*-be képező függvény és az *f: A→B* *A*-t a *B*-re képező függvény közötti lényegi különbséget szemlélteti.



f: A→B *A*-t a *B*-be képező függvény

3.1 ábra

f: A→B *A*-t a *B*-re képező függvény

3.2 ábra

3.2 A függvény megadása

A továbbiakban a függvény fogalmát mindig a 3.9 definíció értelmében fogjuk használni. Ezek szerint a függvény megadásához három „dolog” szükséges:

(1) egy A halmaz mint értelmezési tartomány

(2) egy B halmaz mint képhalmaz;

(3) egy hozzárendelési szabály, amely az A halmaz ***minden eleméhez*** a B halmaz ***pontosan egy elemét*** rendeli hozzá.

A függvény megadása

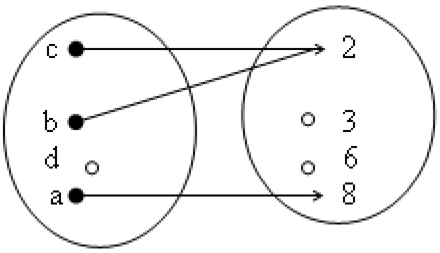
3.10 Példa Legyen $A=\{a, b, c, d\}$ és $B=\{2, 3, 6, 8\}$.
Ekkor például az $A\times B$ Descartes szorzat

$$f=\{ (c, 2), (b, 2), (a, 8) \}$$

részhalmaza – függvény. A definícióban említett jelöléssel élve: $f(c)=2$, $f(b)=2$, $f(a)=8$.
Azonban a

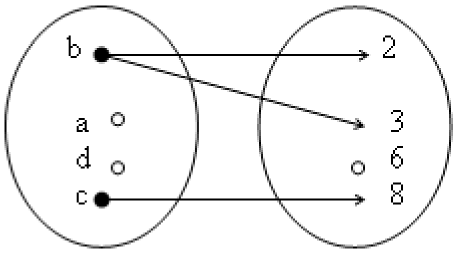
$$g=\{ (b, 2), (b, 3), (c, 8) \}$$

részhalmaz – nem függvény, mivel a $b\in A$ elemhez két olyan különböző B-beli elem tartozik (a 2 és a 3), amellyel $(b,2)\in g$ és $(b,3)\in g$. Megjegyezzük még, hogy az f függvény esetén egyetlen olyan B-beli y elem sem létezik, amelyre $(d,y)\in f$ teljesülne. Az f függvényt és a g relációt alábbi ábra szemlélteti:



f – függvény

3.3 ábra



g – nem függvény

3.4 ábra

3.11 Definíció Legyen A tetszőleges halmaz. Az $f\colon A \to \mathbf{R}$ függvényt ***valós függvénynek*** és $D\subseteq \mathbf{R}$ esetén az $f\colon D \to \mathbf{R}$ függvényt ***egyváltozós valós (valós-valós) függvénynek*** nevezik.

valós függvény

Ekkor a kétdimenziós koordinátarendszerben az $(x, f(x))$, $x\in D$ pontok halmazát az f függvény ***grafikonjának (ábrájának, görbéjének, gráfjának)*** nevezzük.

a függvény grafikonja

Megjegyzés: a halmazok egyenlőségéből következik, hogy két *f: A→B* és *g: C→D* függvény akkor és csak akkor egyenlő, ha *A=C* és *f(x)=g(x)* minden $x \in A$ esetén.

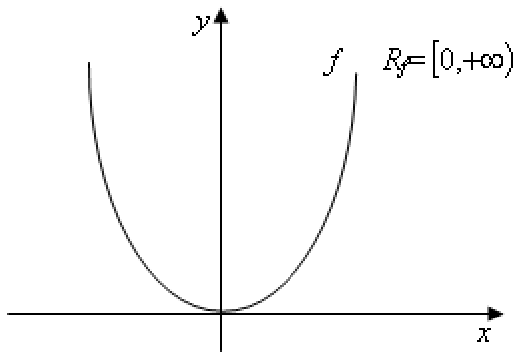
Például az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = x^2$$

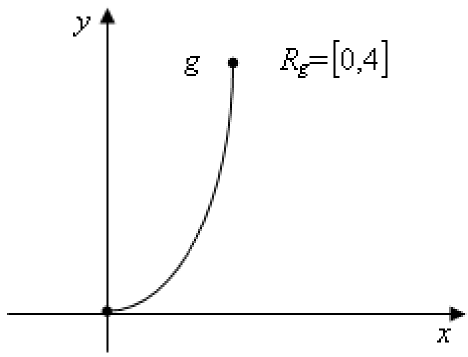
és a

$$g\colon [0,2] \to \mathbf{R} \qquad g(x) = x^2$$

két különböző függvény, íme a grafikonjuk:



3.5 ábra



3.6 ábra

Megjegyezzük, hogy a példában szereplő g függvény az f függvény leszűkítése. Íme a függvény leszűkítésének pontos definíciója.

a függvény leszűkítése

3.12 Definíció Legyen *f: A → B* *A*-t a *B*-be képező függvény és $H \subseteq A$. Ekkor a

$$f_H : H \to B,\ f_H(x)=f(x) \qquad (x \in H)$$

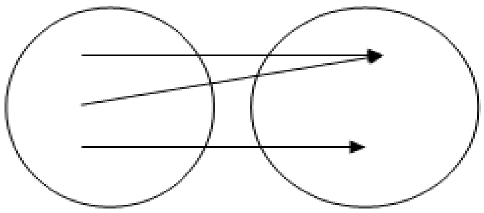
függvényt az f függvény ***H-ra vonatkozó leszűkítésének*** nevezzük.

invertálható függvény

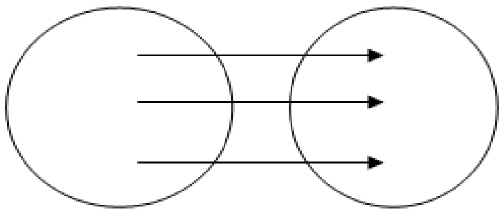
a függvény inverz

3.13 Definíció Az *f: A → B* *A*-t a *B*-re képező függvényt ***invertálhatónak (kölcsönösen egyértelmű leképezésnek)*** nevezzük, ha minden $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ és $a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$. Ekkor azt a $f^{-1} : B \to A$ függvényt, amely minden *f(a)=b* esetén a *b*-hez az *a*-t rendeli hozzá, az f ***függvény inverzének*** nevezzük.

A nem invertálható és az invertálható függvény közötti különbséget az alábbi két ábra szemlélteti.



3.7 ábra



3.8 ábra

Az előző példánál maradva, az

$f\colon\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2$

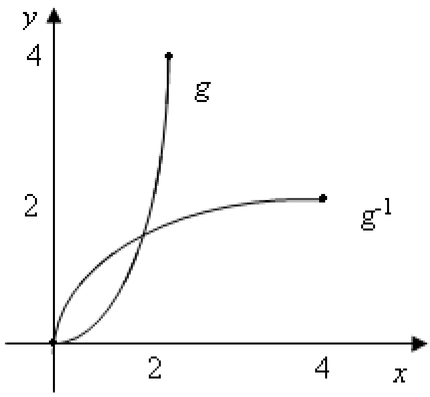
függvény nem invertálható, mert például $f(-2)=f(2)$. Azonban

$g\colon\ [0,2]\to\mathbf{R},\ g(x)=x^2$

függvény invertálható, és ennek inverze a

$g^{-1}\colon [0;4]\to[0;2], \qquad g^{-1}(x)=\sqrt{x}$

függvény.



3.9 ábra

3.14 Definíció Legyen $g\colon A\to B$ A-t a B-re képező függvény és $f\colon B\to C$ B-t a C-be képező függvény. Ekkor az

$$f\circ g : A\to C,\ (f\circ g)(x)=f(g(x)) \qquad (x\in A)$$

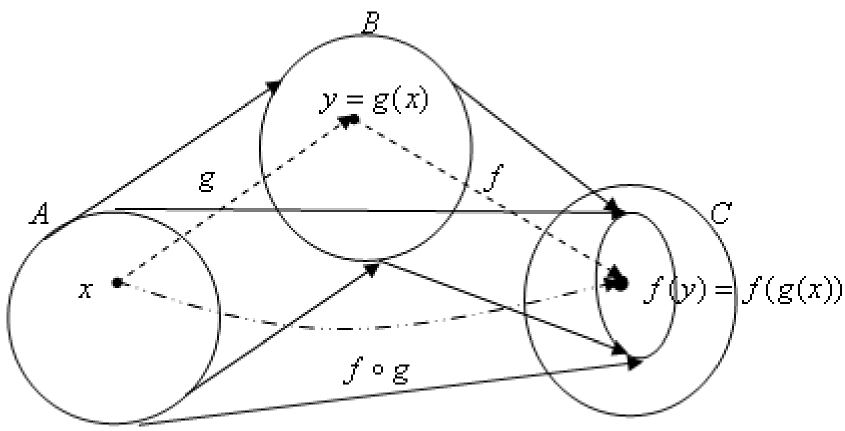
függvényt az f és a g függvény ***összetett függvényének*** nevezzük. Ekkor az f-et ***külső*** és a g-t ***belső függvénynek*** nevezzük.

összetett függvény

külső függvény

belső függvény

A definícióban közölt konstrukciót az alábbi ábra szemlélteti.

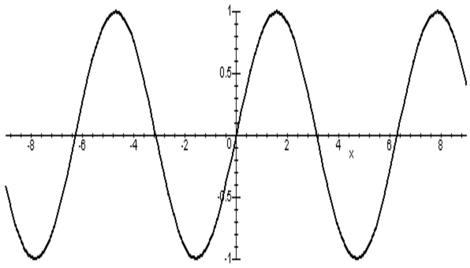


3.10 ábra

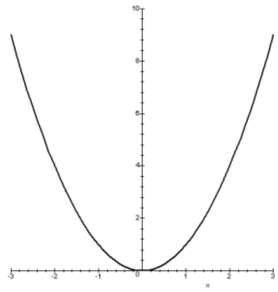
Ahogy a fenti ábrából is látszik, az összetett függvény esetén nem mindegy, hogy melyik a belső, és melyik a külső függvény. Az alábbiakban ezt a különbséget a függvények grafikonjaival szemléltetjük.

3.15 Példa Legyen

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x$ és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=x^2.$



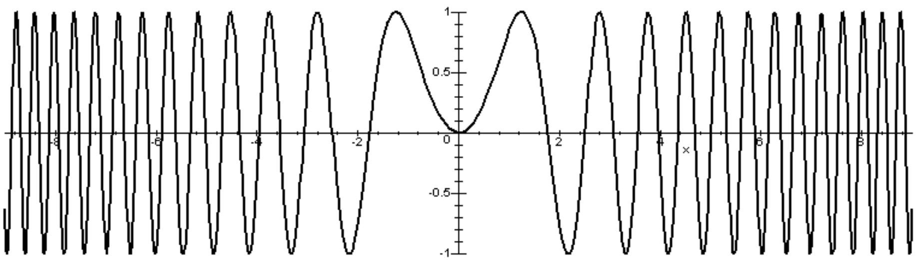
3.11 ábra



3.12 ábra

Ekkor

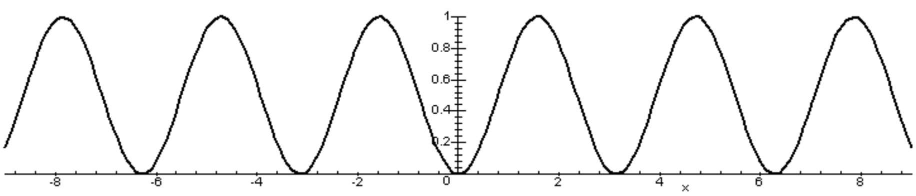
$$h_1=f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad h_1(x)=f(x^2)=\sin x^2$$



3.13 ábra

és

$$h_2=g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad h_2(x)=g(\sin x)=(\sin x)^2=\sin^2 x$$



3.14 ábra

Az alábbiakban bemutatjuk a „legegyszerűbb” egyváltozós valós függvényt.

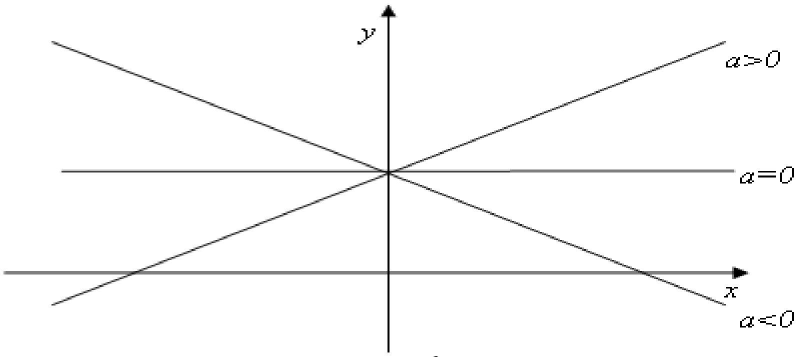
3.3 Elsőfokú (lineáris) függvény

Az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = a\,x+b$$

alakú függvény, ahol a és b valós számok.

Az a számot a függvény ***meredekségének*** is szokták mondani; a=0 esetben ***konstans függvényről*** beszélünk.



3.15 ábra

A függvény grafikonja egy egyenes, amely az y tengelyt a b pontban metszi. Pozitív a esetén a függvény szigorúan monoton növekvő, negatív meredekség esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. Értékkészlete $a \neq 0$ esetén a valós számok halmaza.

3.16 Példa (A fogyasztási függvény) A Keynes-i makroökonómiában a javakra és a szolgáltatásokra fordított C teljes fogyasztási kiadást az Y nemzeti jövedelem függvényének tekintik, azaz

$$C = f(Y).$$

Számos modellben feltételezik, hogy a fogyasztási függvény lineáris, vagyis

$$C = a + b\,Y.$$

Itt a b meredekséget ***fogyasztási határhajlandóságnak*** nevezik.

3.17 Példa A közgazdaságtanban a keresleti-kínálati rendszerben általában szintén lineáris modellt feltételeznek:

$$D = a - b\,P,$$
$$S = \alpha + \beta\,P,$$

ahol P az egységár, továbbá a és b a D keresleti függvény pozitív paraméterei, α és β pedig az S kínálati függvény (szintén pozitív) paraméterei. Az ehhez hasonló függvények fontos szerepet játszanak az ún. kvantitatív közgazdaságtanban, ahol egy konkrét árucikk piacát a fenti keresleti és kínálati függvényekkel modellezik. Vizsgáljuk meg, mikor van a kereslet egyensúlyban a kínálattal. Nyilván a P_0 egyensúlyi árnak a keresletet a kínálattal egyensúlyba kell hoznia, azaz $P = P_0$ esetén $D = S$, vagyis

$$a - bP_0 = \alpha + \beta P_0.$$

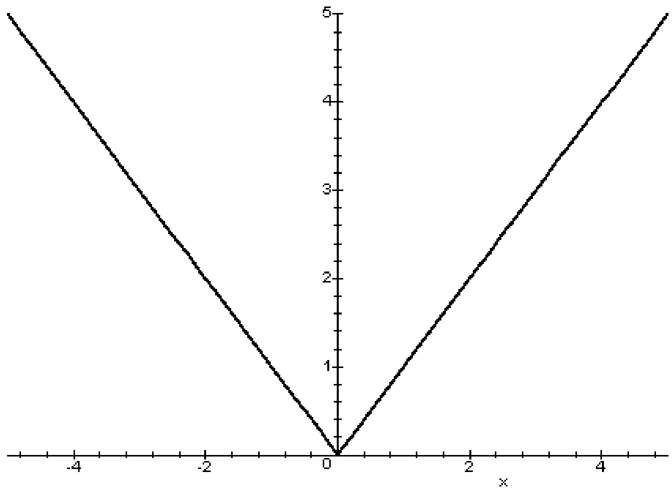
Innen $a - \alpha = (b + \beta)P_0$. Az egyensúlyi mennyiséget jelölje $Q_0 = a - bP_0 = \alpha + \beta P_0$. Következésképpen az egyensúly feltétele

$$P_0 = \frac{a-\alpha}{b+\beta}, \qquad Q_0 = a - b\frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{a\beta+\alpha b}{b+\beta}.$$

Ismerve az a, b, α és β paraméterek értékeit modellünk teljes lenne – meg tudnánk mondani az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget.

A későbbiekben fogjuk még említeni az abszolútérték-függvényt. Íme a grafikonja:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x) = \text{abs}\, x = |\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



3.16 ábra

3.4 Függvénytulajdonságok

Most megismerkedünk az egyváltozós valós függvények néhány jellemző tulajdonságával.

3.18 Definíció Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ és $f: D \to \mathbf{R}$. Azt az $a \in D$ számot, amelyre $f(a)=0$ az f függvény ***zérushelyének*** nevezzük.

zérushely

3.19 Definíció Az f függvényt ***monoton növekvőnek*** nevezzük az $X \subseteq D$ halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a függvényértékek között szigorú egyenlőtlenség jel van, akkor ***szigorúan monoton növekvő függvényről*** beszélünk.

monoton növekvő függvény

3.20 Definíció Az f függvényt ***monoton csökkenőnek*** nevezzük az $X \subseteq D$ halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ha a függvényértékek között szigorú egyenlőtlenség jel van, akkor ***szigorúan monoton csökkenő függvényről*** beszélünk.

monoton csökkenő függvény

3.21 Definíció Az $a \in D$ számot az f függvény ***lokális*** vagy ***helyi minimumhelyének*** nevezzük, ha a-nak létezik olyan K környezete, hogy minden $x \in K \cap D$ $(x \neq a)$ esetén $f(a) \leq f(x)$.

lokális minimum-hely

3.22 Definíció Az $a \in D$ számot az f függvény ***lokális*** vagy ***helyi maximumhelyének*** nevezzük, ha a-nak létezik olyan K környezete, hogy minden $x \in K \cap D$ $(x \neq a)$ esetén $f(a) \geq f(x)$.

A lokális minimumhely és a lokális maximumhely közös elnevezése – ***lokális szélsőértékhely***.

lokális maximum-hely

lokális szélső-értékhely

3.23 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ függvényt ***párosnak*** nevezzük, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és

$$f(-x) = f(x).$$

páros függvény

3.24 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ függvényt ***páratlannak*** nevezzük, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és

$$f(-x) = -f(x).$$

páratlan függvény

Folytatjuk a nevezetes egyváltozós valós függvények bemutatását. Az alábbiakban néhány – a középiskolából megismert – egyváltozós valós függvényt részletezünk.

3.5 Középiskolában ismertetett függvények

3.5.1 Másodfokú (kvadratikus) függvény

Az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathrm{R}, \qquad a \neq 0)$$

függvény. E függvény grafikonját ***parabolának*** nevezik.

Itt is – mint általában a függvény grafikonjának vázolásakor – hasznos megadni a választ az alábbi kérdésekre:

1. Vannak-e a függvénynek zérushelyei?
2. Hol pozitív, hol negatív a függvény (jeltartási intervallumok)?
3. Hol növekvő, hol csökkenő a függvény (monotonitási intervallumok)?
4. Hol vannak a függvény lokális szélsőértékhelyei?

Az első kérdésre $b^2 - 4ac \geq 0$ esetén a választ az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldó-képlete szolgáltatja:

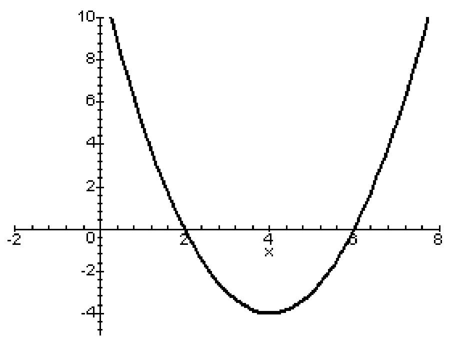
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A második és harmadik kérdéssel most nem foglakozunk, a negyedik kérdésre a választ bizonyítás nélkül közöljük (a későbbiekben ezeket majd részletesen tárgyaljuk).

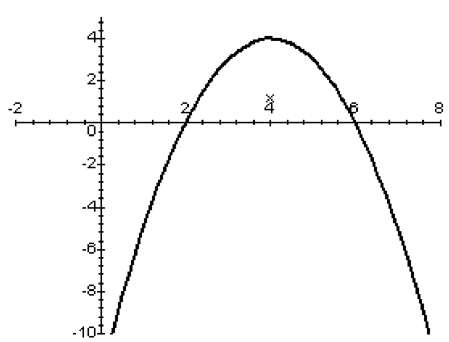
Az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény lokális szélsőértékhelye az $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ pont, amelynek értéke $f(x_0) = c - \dfrac{b^2}{4a}$. Ez a pont $a > 0$ esetén lokális minimumpont, míg $a < 0$ esetén lokális maximumpont.

3.25 Példa Az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonja, ha

$f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$ és $f(x) = -x^2 + 8x - 12 = -(x-2)(x-6)$



3.17 ábra

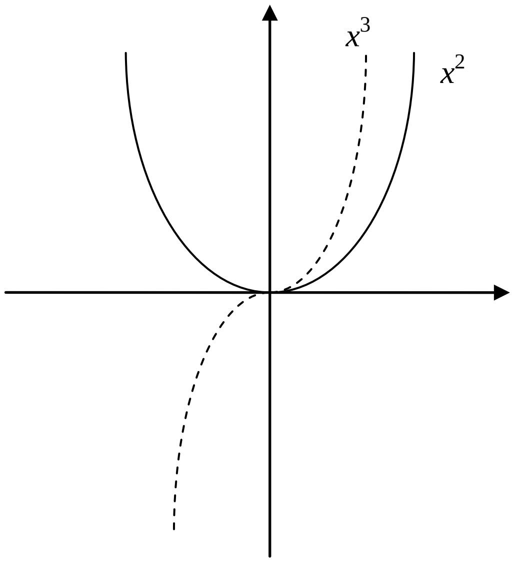


3.18 ábra

3.5.2 Hatvány függvény

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

Páros n kitevő esetén a függvény a $(-\infty,0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0,+\infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, az $x=0$ pont lokális minimumhely (az ábrán $n=2$ esetén a folyamatos vonal szemlélteti).
Páratlan kitevő esetén a függvény mindenütt szigorúan monoton növekvő ($n=3$ esetén az ábra szaggatott vonala szemlélteti).
Páros n kitevő esetén a függvény páros, míg páratlan kitevő esetén – páratlan.

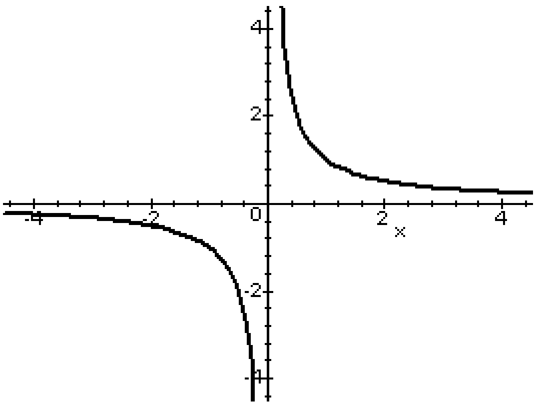


3.19 ábra

3.5.3 Reciprok függvény

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

Grafikonját ***hiperbolának*** nevezik. Értelmezési tartományának mindkét $(-\infty,0)$ és $(0,+\infty)$ részintervallumán szigorúan monoton csökkenő, értékkészlete a nullától különböző valós számok halmaza. Páratlan függvény.

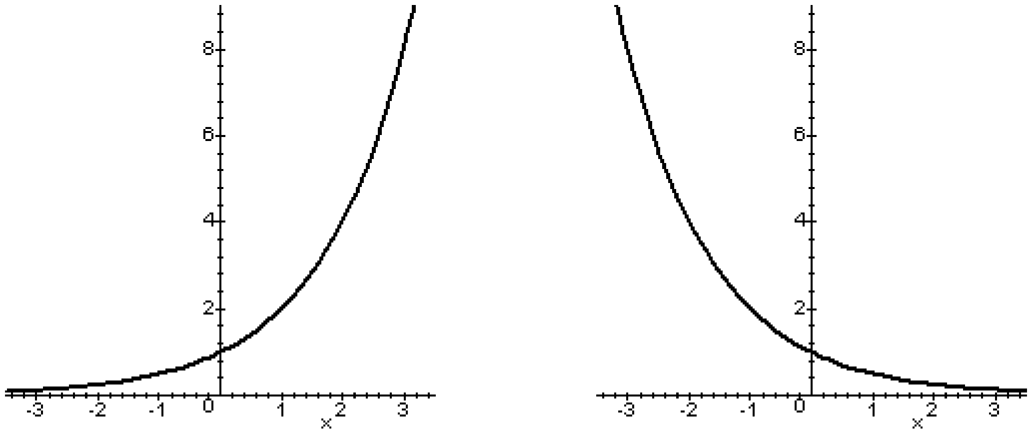


3.20 ábra

3.5.4 Exponenciális függvény

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=a^x,\quad a>0, a\neq 1$$

Az $a>1$ esetben szigorúan monoton növekvő, míg $0<a<1$ esetén szigorúan monoton csökkenő. Értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.



$a>1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0<a<1$

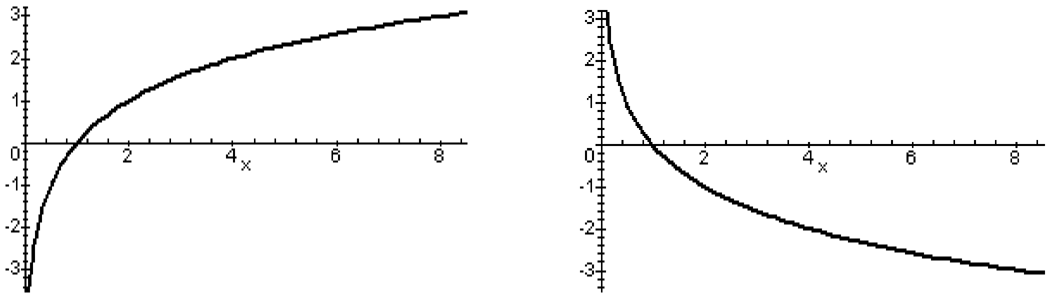
3.21 ábra

3.5.5 Logaritmus függvény

$$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R},\ f(x)=\log_a x,\quad a>0, a\neq 1$$

Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=a^x$ exponenciális függvény inverz függvénye.

Az $a>1$ esetben szigorúan monoton növekvő, míg $0<a<1$ esetén szigorúan monoton csökkenő. Értékkészlete a valós számok halmaza. Zérushelye $x_0=1$.



$a>1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0<a<1$

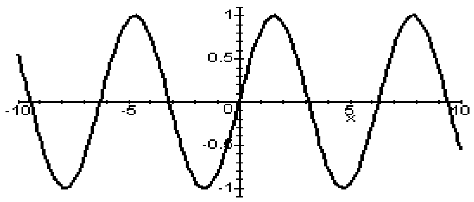
3.22 ábra

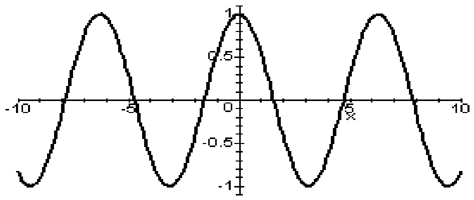
3.5.6 Trigonometrikus függvények

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x,$ $\qquad\qquad$ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\cos x,$

A sinusfüggvény (3.23 ábra) periodikus, periódusa 2π. Páratlan függvény. Zérushelyei: $x=k\pi$, maximumhelyei: $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, minimumhelyei $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). Értékkészlete: $[-1,\ 1]$.

A cosinusfüggvény (3.24 ábra) periodikus, periódusa 2π. Páros függvény. Zérushelyei: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, maximumhelyei: $x=2k\pi$, minimumhelyei $x=\pi+2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). Értékkészlete: $[-1,\ 1]$.



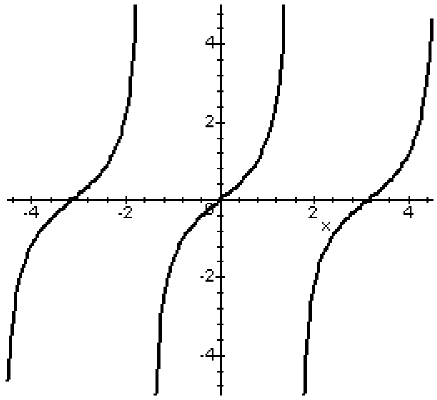


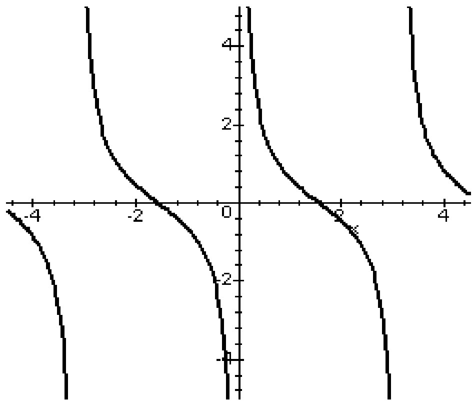
3.23 ábra $\qquad\qquad$ *3.24 ábra*

$f:\mathbf{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\operatorname{tg} x$ $\qquad\qquad$ $f:\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\operatorname{ctg} x$

A tangensfüggvény (3.25 ábra) értékkészlete a valós számok halmaza. A függvény periodikus, periódusa π. Páratlan függvény. Zérushelyei: $x=k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). A $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon folytonos, szigorúan monoton növekvő.

A cotangensfüggvény (3.26 ábra) értékkészlete a valós számok halmaza. A függvény periodikus, periódusa π. Páratlan függvény. Zérushelyei: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). A $(0,\pi)$ intervallumon folytonos, szigorúan monoton csökkenő.





3.25 ábra *3.26 ábra*

3.6 Racionális egész függvény (polinom)

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\; f(x)=a_nx^n+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0, \qquad a_i\in\mathbf{R}.$$

Az $a_n\neq 0$ esetben az a_n-t ***főegyütthatónak*** és *n*-t a ***polinom fokának*** nevezik, jele: deg *f* = *n*. Ilyenkor ***n-edfokú*** valós együtthatójú polinomról beszélünk.

gyöktényező

3.26 Tétel Ha a az *n*-edfokú *f* polinom zérushelye, akkor *f* felírható

$$f(x)=(x-a)g(x)$$

alakban, ahol g valamely $(n-1)$-ed fokú polinom.

Ekkor az $(x-a)$-t ***gyöktényezőnek*** nevezzük.

Amennyiben $f(x)=(x-a)^k g(x)$ és $g(a)\neq 0$, akkor *k-**adfokú gyöktényezőről*** vagy *k-**szoros zérushelyről*** beszélünk.

Bizonyítás. Ha a az f polinom zérushelye, akkor $f(a)=0$ és

$$f(x)=f(x)-f(a)=a_nx^n+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0-(a_na^n+\dots+a_2a^2+a_1a+a_0)=$$
$$=a_n(x^n-a^n)+\dots+a_2(x^2-a^2)+a_1(x-a).$$

Felhasználva az $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$ azonosságot, az utóbbi összeg minden tagjából kiemelhető az $(x-a)$ tényező, és a megmaradt rész $(n-1)$-ed fokú polinom lesz. Állításunkat igazoltuk.

a polinom zérus-helyeinek száma

3.27 Tétel Az *n*-edfokú valós együtthatójú *f* polinomnak legfeljebb n valós gyöke van, mégpedig páros n esetén páros számú, míg páratlan n esetén páratlan számú gyöke (a többszörös gyökök figyelembevételével).

3.28 Példa Írjuk fel az

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\; f(x)=3x^2-18x+24$$

polinomot gyöktényezős alakban.

Megoldva az $f(x)=0$ egyenletet, vagyis megkeresve a $3x^2-18x+24=0$ egyenlet gyökeit kapjuk, hogy $x_1=2$ és $x_2=4$. Ekkor a 3.26 tétel alapján

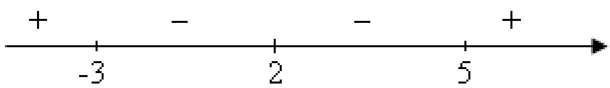
$$f(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4).$$

3.29 Példa Vázoljuk az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = (x-2)^2(x+3)(x-5)^3$$

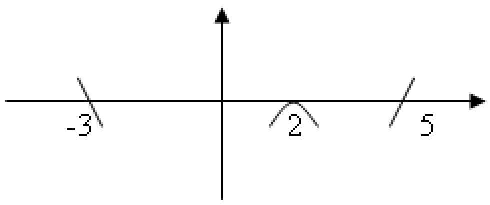
függvény grafikonját.

Először meghatározzuk a függvény zérushelyeit, majd a jeltartási intervallumait: vagyis azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény értéke negatív, illetve azokat – amelyeken pozitív. Könnyen látható, hogy az $x = 2$ kétszeres, az $x = -3$ egyszeres és az $x = 5$ háromszoros zérushelye f-nek. A függvény értéke ezekben a pontokban nulla, és csakis ezekben a pontokban egyenlő nulla. Tehát az összes többi pontban nem nulla, vagyis vagy pozitív, vagy negatív. A függvény zérushelyei a számegyenest négy intervallumra osztják: $(-\infty,-3)$, $(-3,\ 2)$, $(2,\ 5)$, $(5,\infty)$. Ezek mindegyikén a függvény állandó előjelű: vagy pozitív, vagy negatív. Kiszámítva a függvény értékét például az $x = 6$ pontban kapjuk, hogy $f(6)>0$, ezért az egész $(5,\infty)$ intervallumon a függvény pozitív. Ugyanis, ha valamilyen 5-től nagyobb, például az $x = 7$ pontban a függvény értéke negatív lenne, akkor az f függvénynek az $(5,\ 7)$ intervallumon még egy zérushelye lenne. Hasonló módon kapjuk, hogy mivel például $f(4) < 0$, ezért a $(2,\ 5)$ intervallumon a függvény negatív. A $(-3,\ 2)$ intervallumon az f szintén negatív, mivel például $f(0) < 0$ és végül az $f(-4) > 0$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy a $(-\infty,-3)$ intervallumon a függvény pozitív. A kapott eredményeket az alábbi ábrán szemléltetjük:

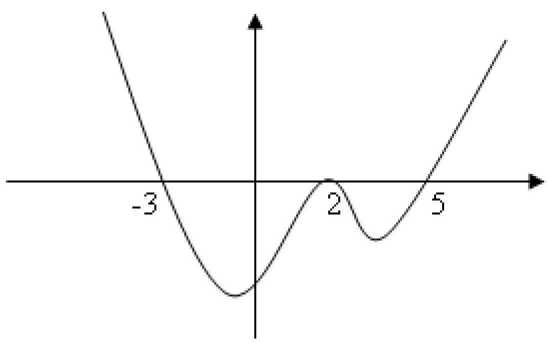


3.27 ábra

Most megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a függvény a zérushelyek környezetében. Az $x = -3$ pontban a függvény pozitívból megy át negatívba, az $x=5$ pontban negatívból pozitívba, míg az $x=2$ pont környezetében az f grafikonja alulról érinti az x tengelyt. Az eredményt a 3.28 ábra szemlélteti. Végül összekötjük a hiányzó részeket, és a többi helyen úgy vázoljuk, mint a hatodfokú hatványfüggvényt. Az f grafikonját a 3.29 ábrán láthatjuk.



3.28 ábra



3.29 ábra

3.7 Racionális törtfüggvény

$$f\colon D\to\mathbf{R}\quad f(x)=\frac{a_n x^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}=\frac{g(x)}{h(x)},\quad \text{ahol } a_n\neq 0,\ b_m\neq 0.$$

E függvény három nevezetes pontját fontos ismerni.

zérushely

3.30 Definíció Ha $g(x_0)=0$ és $h(x_0)\neq 0$, akkor x_0 ***zérushelye*** az *f*-nek.

Ha x_0 – *k*-szoros zérushelye *g*-nek és *l*-szeres zérushelye *h*-nak, akkor

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^k\cdot g_1(x)}{(x-x_0)^l\cdot h_1(x)}$$

hézagpont

és $k\geq l$ esetén x_0-t az f függvény ***hézagpontjának***,

póluspont

$k<l$ esetén pedig az f ***póluspontjának*** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a hézagpont és póluspont nem tartozik a függvény értelmezési tartományához.

polinomok maradékos osztása

3.31 Tétel Legyenek *P* és *Q* polinomok, és tegyük fel, hogy a *P* fokszáma nagyobb vagy egyenlő, mint a *Q* fokszáma. Ekkor léteznek olyan *q* és *r* egyértelműen meghatározott polinomok, amelyekre minden $x\in\mathbf{R}$ esetén

$$P(x)=q(x)Q(x)+r(x),$$

ahol az *r* polinom fokszáma kisebb, mint a *Q* polinomé, továbbá $Q(x)\neq 0$ esetén

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}.$$

3.32 Példa Vázoljuk az

$$f\colon \mathbf{R}\backslash\{-2;-1;1\}\to\mathbf{R}\quad f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{x^4-x^3-10x^2+4x+24}{x^3+2x^2-x-2}\tag{3.1}$$

függvény grafikonját.

A feladatot több lépésben oldjuk meg.

1. Lépés Meghatározzuk a függvény nevezetes pontjait (hézagpont, póluspont, zérushely).

Ehhez a számláló és a nevező gyökeit szükséges ismerni. A számláló gyökei legyenek x_1, x_2, x_3 és x_4. Ekkor a 3.26 tétel alapján

$$g(x)=x^4-x^3-10x^2+4x+24=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Felbontva a zárójelet, továbbá feltételezve, hogy a gyökök egész számok, kapjuk, hogy a g polinom gyökei a polinom szabad tagjának (24-nek) az osztói közül kerülnek ki.

Kiszámítva a h polinom értékét a $\pm1, \pm2, \pm4, \pm3, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$ helyeken kapjuk, hogy

$$g(2) = 16 - 8 - 40 + 8 + 24 = 0$$

és $x_1 = 2$. Ezért a 3.26 tétel szerint $g(x) = (x-2)g_1(x)$. A g_1 polinomot – a 3.31 tétel alapján – ún. polinom-osztással határozzuk meg:

$$\begin{array}{l}
x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24 \quad : \quad x-2 \quad = \quad x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
\underline{x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad x^3 - 10x^2 + 4x + 24 \\
\qquad \underline{x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad -8x^2 + 4x + 24 \\
\qquad\quad \underline{-8x^2 + 16x \qquad} \\
\qquad\qquad\quad -12x + 24 \\
\qquad\qquad\quad -12x + 24
\end{array}$$

polinom-osztás

Hasonlóan ellenőrizhető, hogy a

$$g_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

polinom gyöke az $x_2 = -2$ és

$$g_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x+2)(x^2 - x - 6)$$

Innen már a másodfokú egyenlet megoldó-képlete alapján könnyen kapjuk, hogy $x_3 = -2$ és $x_4 = 3$. Összefoglalva, az f racionális törtfüggvény számlálója felírható

$$g(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24 = (x-2)(x+2)^2(x-3)$$

gyöktényezős alakban és ennek gyökei:

$$x = -2 \text{ - kétszeres, } x = 2 \text{ és } x = 3 \text{ egyszeres gyök.}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az adott f racionális törtfüggvény h nevezőjének gyökei:

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1 \text{ és } x_3 = 1,$$

vagyis a h felírható

$$h(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x+1)(x-1)$$

alakban.

Következésképpen:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x-3)(x-2)(x+2)^2}{(x-1)(x+1)(x+2)},$$

a függvény hézagpontja: $x = -2$ (a számláló és a nevező közös gyöke),

a függvény póluspontjai: $x = -1$ és $x = 1$ (csak a nevező gyökei),

a függvény zérushelyei: $x = 2$ és $x = 3$ (csak a számláló gyökei).

Megjegyzés: A törtfüggvényt, hézagpontjának ismeretében, egyszerűbb alakban lehet felírni, és **ezt javasoljuk mindig megtenni!** Célszerű a további elemzésnél a függvénynek az egyszerűsítés után kapott alakját vizsgálni.

Folytatva a példa megoldását a továbbiakban függvényünknek az

$$f\colon \mathbf{R}\backslash\{-2;\,-1;\,1\} \to \mathbf{R} \qquad f(x)=\frac{g_1(x)}{h_1(x)}=\frac{(x-3)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \tag{3.2}$$

alakban felírt változatát vizsgáljuk. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az (3.1) és a (3.2) felírás egy és ugyanazt a függvényt adja meg.

2. Lépés Határozzuk meg a függvény jeltartási intervallumait (hol pozitív, hol negatív a függvény értéke)!

Ehhez a polinom vázolásánál már ismertetett eljárásunkat fogjuk alkalmazni. Függvényünk a póluspontban ($x=-1$, $x=1$) és a hézagpontban ($x=-2$) nincs értelmezve, nulla értéket csak a zérushelyeken ($x=2$ és $x=3$) vesz fel. Tehát az összes többi pontban a függvény értéke vagy pozitív, vagy negatív. Esetünkben a függvény nevezetes pontjai a számegyenest hat intervallumra bontják:

$$(-\infty,-2),\quad (-2,-1),\quad (-1,1),\quad (1,2),\quad (2,3),\quad (3,+\infty)$$

és az elmondottakat figyelembe véve, ezen intervallumok mindegyikén a függvény értéke állandó előjelű (vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív). Tehát annak megállapításához, hogy az említett intervallumokon milyen előjelű a függvény, elegendő az adott intervallum egy pontjában kiszámítani a függvény értékét. Elvégezve a számításokat kapjuk, hogy például

$$f(-3)<0,\quad f(-1{,}5)>0,\quad f(0)<0,\quad f(1{,}5)>0,\quad f(2{,}5)<0 \quad \text{és} \quad f(4)>0.$$

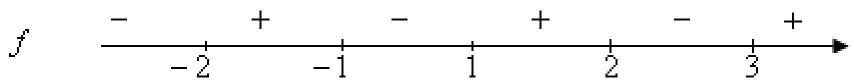
Ezért a függvény értéke

$$\text{a } (-2,-1),\ \text{az } \ (1,2) \ \text{ és } \ \text{a } \ (3,+\infty)$$

intervallumokon pozitív, míg

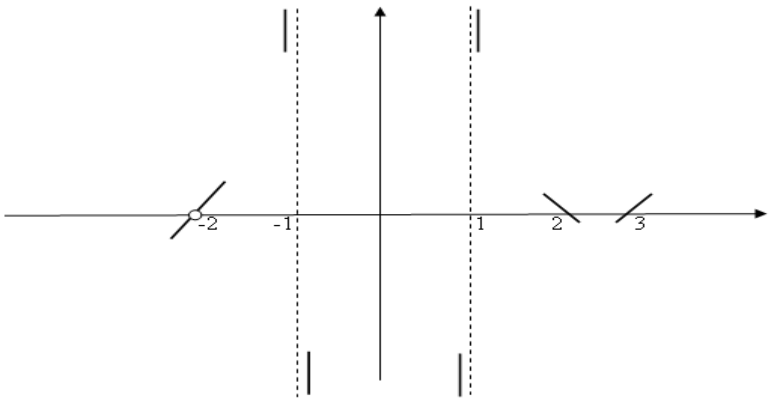
$$\text{a } (-\infty,-2),\ \text{a } (-1,1) \ \text{ és } \ \text{a } \ (2,3)$$

intervallumokon negatív. A függvény jeltartási intervallumait szemléletesen így fogjuk ábrázolni:



3. Lépés Hogyan viselkedik a függvény a nevezetes pontjai környezetében?

A zérushely környezetében történő vizsgálat hasonló a polinom zérushelyének környezetében végzett vizsgálathoz. A póluspontban a függvénynek ún. függőleges aszimptotája van – ezekben a pontokban a függvény hasonlóan viselkedik, mint a reciprok-függvény az x=0 pont környezetében: a $+\infty$-hez vagy a $-\infty$-hez tart, attól függően, hogy pozitív vagy negatív értéket vesz-e fel. A hézagpontban a függvény nincs értelmezve, így ezt a pontot a függvény grafikonján egy üres körrel szemléltetjük:



3.30 ábra

Ezek után, ahol ez már lehetséges (esetünkben a –2 és a 3 pont között), megrajzoljuk a grafikont – összekötjük annak hiányzó részeit.

4. Lépés. Hogyan viselkedik a függvény a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben, van-e vízszintes vagy ferde aszimptotája, metszi-e a függvény grafikonja az aszimptotáit?

Megint csak polinom-osztást alkalmazva kapjuk, hogy

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24 : x^3 + 2x^2 - x - 2 = x - 3$$
$$\underline{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$$
$$-3x^3 - 9x^2 + 6x + 24$$
$$\underline{-3x^3 - 6x^2 + 3x + 6}$$
$$-3x^2 + 3x + 18$$

így a 3.31 tétel alapján

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = x - 3 + \frac{-3x^2 + 3x + 18}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

(≈ 0,) ha „x elég nagy”

Könnyen belátható, hogy az abszolút-értékben „elég nagy” x-ekre a

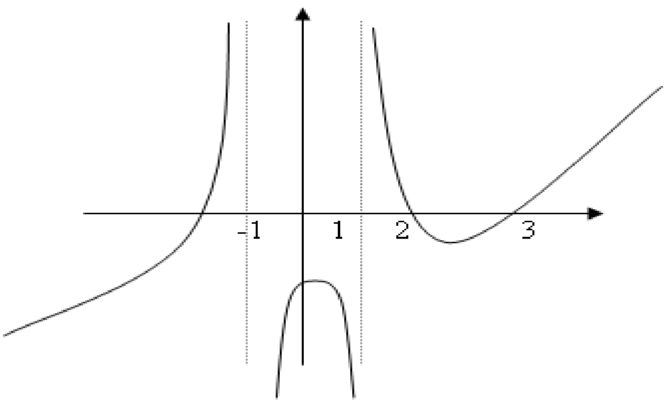
$$\frac{-3x^2 + 3x + 18}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{x^2\left(-3 + \frac{3}{x} + \frac{18}{x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)} \approx \frac{-3x^2}{x^3} \approx \frac{-3}{x} \approx 0$$

kifejezés értéke közel áll a nullához, és ezért a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben az függvény úgy viselkedik, mint az

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ F(x) = x - 3$$

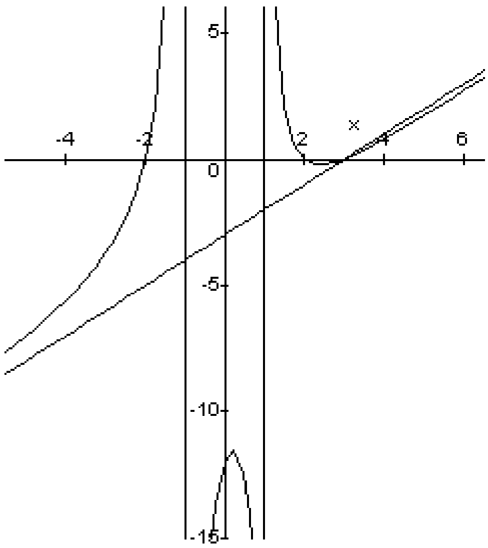
függvény. Ilyenkor az $y = x - 3$ egyenest a függvény ferde aszimptotájának is nevezik.

Az elmondottakat összefoglalva kapjuk a függvény grafikonjának vázlatát:



3.31 ábra

Az alábbi ábra az *f* függvény grafikonjának a Mapple V.4 szoftvercsomag segítségével szerkesztett változatát mutatja:



3.32 ábra

3.33 Példa Vázoljuk az

$$f\colon \mathbf{R}\setminus\{-3; -1; 0; 2\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{(x-1)(x-4)x}{(x-2)(x+1)(x+3)x}$$

függvény grafikonját.

Az előző példában bemutatott eljáráshoz hasonlóan – a részletes elemzéseket mellőzve – az alábbiakat kapjuk.

A számláló gyökei: $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

A nevező gyökei: $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

Hézagpont: $x = 0$.

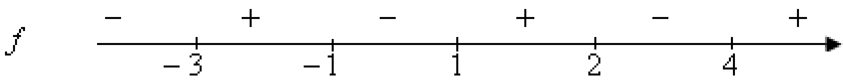
Póluspont: $x = -3$, $x = -1$ és $x = 2$ (függőleges aszimptoták).

Zérushely: $x = 1$ és $x = 4$.

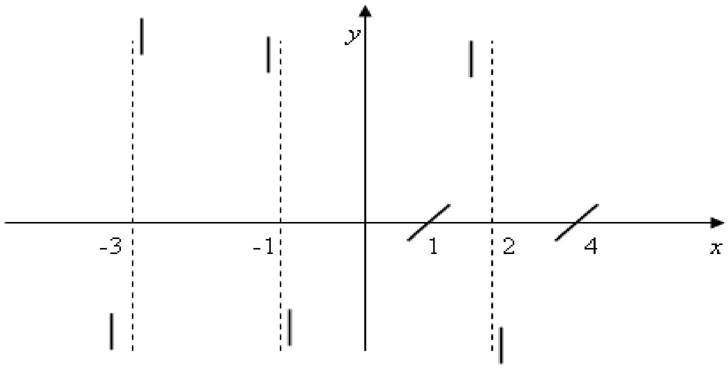
A hézagpont ismeretében most is – mint minden esetben – egyszerűsítünk. Tehát

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x+1)(x+3)}.$$

Jeltartási intervallumok:



A függvény grafikonjának vázolása a nevezetes pontok környezetében:



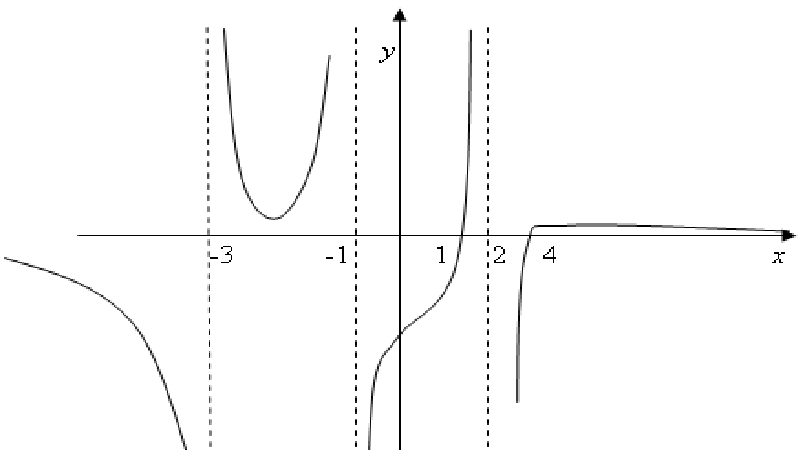
3.33 ábra

Végül a függvény viselkedése a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{x^2-5x+4}{x^3+2x^2-5x-6}=\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}\approx\frac{1}{x}\approx 0,$$

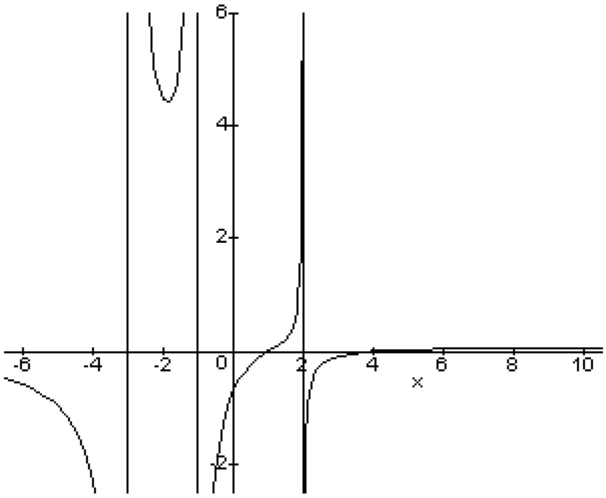
vagyis az y=0 egyenes (az x tengely) a függvény vízszintes aszimptotája.

Az elmondottakat összefoglalva kapjuk a függvény grafikonjának vázlatos alakját:



3.34 ábra

illetve a Mapple V.4 szoftvercsomag által készített változatát:



3.35 ábra

3.34 Példa Vázoljuk az

$$f\colon \mathbf{R}\setminus\{-5; -1; 0; 2\} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = \frac{2(x-1)^2(x-4)x}{(x-2)(x+1)(x+5)x}$$

függvény grafikonját.

Az előző példában ismertetettekhez hasonlóan az alábbiakat kapjuk (első ránézésre ez a függvény nem sokban különbözik a 3.33 példában szereplő függvénytől – ez így is van, meg nincs is így).

A számláló gyökei: $x = 0$, $x = 1$ – kétszeres gyök, $x = 4$.

A nevező gyökei: $x = -5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

Hézagpont: $x = 0$.

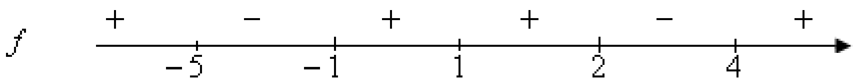
Póluspontok: $x = -5$, $x = -1$ és $x = 2$ (függőleges aszimptoták).

Zérushelyek: $x = 1$ és $x = 4$.

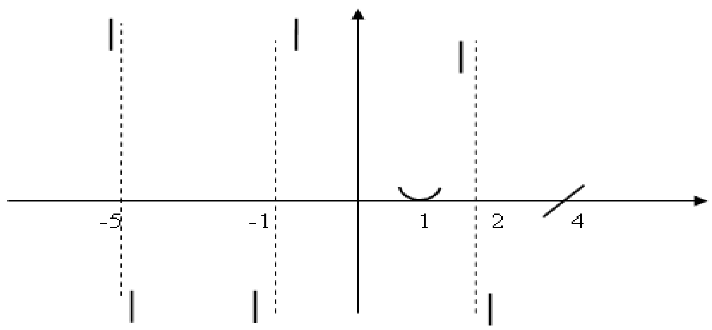
A hézagpont ismeretében most is – mint minden esetben – egyszerűsítünk. Ekkor

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2(x-4)}{(x-2)(x+1)(x+5)}.$$

Jeltartási intervallumok:



A függvény grafikonjának vázolása a nevezetes pontok környezetében:



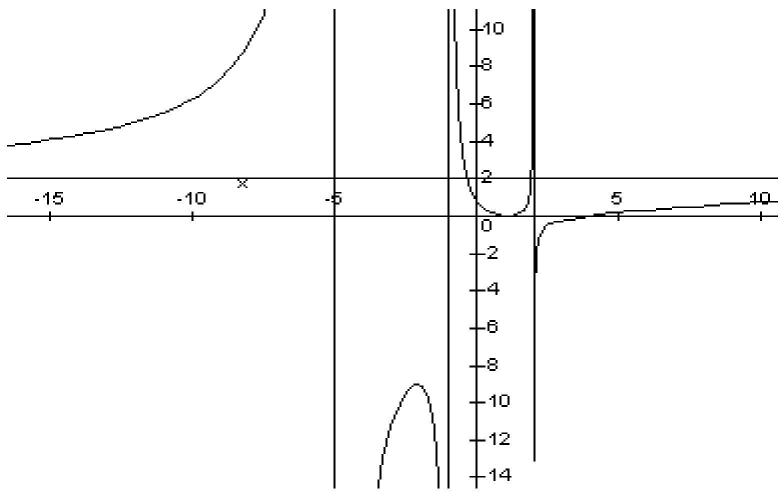
3.36 ábra

Végül a függvény viselkedése a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben:

$$f(x)=\frac{2(x-1)^2(x-4)}{(x-2)(x+1)(x+5)}=\frac{2x^3-12x^2+18x-8}{x^3+4x^2-7x-10}\approx\frac{2x^3}{x^3}\approx 2$$

vagyis az y=2 egyenes a függvény vízszintes aszimptotája.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonját láthatjuk.



3.37 ábra

Megjegyzés: A racionális törtfüggvény vízszintes és ferde aszimptotáinak meghatározásánál az alábbi három esetet különböztethetjük meg.

(1) Ha a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál, akkor az y=0 egyenes (az x tengely) a függvény vízszintes aszimptotája (pl. a 3.33 példa).

(2) Ha a számláló fokszáma megegyezik a nevező fokszámával, akkor az y=C alakú egyenes a függvény vízszintes aszimptotája, ahol C a számláló főegyütthatójának és a nevező főegyütthatójának hányadosa (pl. a 3.34 példa).

(3) Ha a számláló fokszáma eggyel nagyobb a nevező fokszámánál, akkor egy y=kx+b alakú egyenes a függvény ferde aszimptotája, amit polinom-osztással kaphatunk meg. Ekkor a függvény grafikonjának és a ferde aszimptotájának metszéspontjait a polinom-osztáskor keletkezett maradék zérushelyei adják (pl. a 3.32 példa).

Ellenőrző kérdések a 3. fejezethez

E.3.1 A rendezett elempár definíciója.

E.3.2 A Descartes szorzat definíciója.

E.3.3 Határozzuk meg az $\{1, 2, 3, 4\}$ és az $\{5, 6, 7\}$ halmazok Descartes szorzatát!

E.3.4 A függvény definíciója.

E.3.5 A függvény értelmezési tartományának definíciója.

E.3.6 A függvény értékkészletének definíciója.

E.3.7 Az A-t a B-be képező függvény definíciója.

E.3.8 Az A-t a B-re képező függvény definíciója.

E.3.9 Mi a különbség az A-t a B-be és az A-t a B-re képező függvény között?

E.3.10 Az invertálható függvény definíciója.

E.3.11 A függvény inverzének a definíciója.

E.3.12 A függvény leszűkítésének definíciója.

E.3.13 Az összetett függvény definíciója.

E.3.14 A monoton növekvő függvény definíciója.

E.3.15 A monoton csökkenő függvény definíciója.

E.3.16 A függvény lokális minimumhelyének definíciója.

E.3.17 A függvény lokális maximumhelyének definíciója.

E.3.18 A páros függvény definíciója.

E.3.19 A páratlan függvény definíciója.

E.3.20 Jellemezzük a lineáris függvényt!

E.3.21 Jellemezzük a másodfokú függvényt!

E.3.22 Jellemezzük a hatvány függvényt!

E.3.23 Jellemezzük a reciprok függvényt!

E.3.24 Jellemezzük az exponenciális függvényt!

E.3.25 Jellemezzük a logaritmus függvényt!

E.3.26 Jellemezzük a trigonometrikus függvényeket!

Gyakorló feladatok a 3. fejezethez

G.3.1 Jellemezzük az alábbi lineáris függvényt, vázoljuk annak grafikonját.

G.3.1.a) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x$

G.3.1.b) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x + 2$

G.3.1.c) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x - 2$

G.3.1.d) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -3x$

G.3.1.e) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -3x + 2$

G.3.1.f) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -3x - 2$

G.3.1.g) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 5$

G.3.1.h) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 8 - 4x$

G.3.1.i) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 4x - 8$

G.3.1.j) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 8 + 4x$

G.3.1.k) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -4x - 8$

G.3.2 Jellemezzük az alábbi függvényt, vázoljuk annak grafikonját.

G.3.2.a) f: **R**\{3} $\to$ **R**, $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 3}$

G.3.2.b) f: **R**\{3} $\to$ **R**, $f(x) = -\dfrac{4x + 4}{x - 3}$

G.3.2.c) f: **R**\{3} $\to$ **R**, $f(x) = \dfrac{-2x + 4}{x - 3}$

G.3.2.d) f: **R**\{-6} $\to$ **R**, $f(x) = \dfrac{3x + 6}{x + 6}$

G.3.3 Jellemezzük az alábbi másodfokú függvényt, vázoljuk annak grafikonját.

G.3.3.a) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2$

G.3.3.b) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2 + 2$

G.3.3.c) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2 - 2$

G.3.3.d) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3(x - 2)^2$

G.3.3.e) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3(x + 2)^2$

G.3.3.f) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3(x + 2)^2 + 4$

G.3.3.g) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3(x + 2)^2 - 4$

G.3.3.h) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -3x^2$

G.3.3.i) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x^2 + 2$

G.3.3.j) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x^2 - 2$

G.3.3.k) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x-2)^2$

G.3.3.l) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x+2)^2$

G.3.3.m) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x-2)^2 + 4$

G.3.3.n) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x-2)^2 - 4$

G.3.3.o) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x+2)^2 + 4$

G.3.3.p) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3(x+2)^2 - 4$

G.3.3.q) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 12x - 3x^2$

G.3.3.r) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 - 12x$

G.3.3.s) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 10$

G.3.3.t) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 7x - x^2 - 10$

G.3.4 Valamely termék x ezer darabjának előállítási költségét a

$$K : K(x) = x^2 - 8x + 20$$

függvény, árbevételét pedig a

$$B : B(x) = 4x$$

függvény adja meg ezer euróban, ahol $0 \le x \le 12$.

a) Ábrázoljuk a K és a B függvényt (közös koordinátarendszerben)!

b) Mennyi bevétel növekedéssel jár, ha x ezer darab helyett $x+1$ ezer darab terméket értékesítünk?

c) Legalább hány (ezer) terméket kell gyártanunk és értékesítenünk ahhoz, hogy a termelés nyereséges legyen?

d) Mekkora lesz a termelés során a nyereségünk? Adjuk meg és ábrázoljuk az N nyereség-függvényt?

e) Hány (ezer) termék gyártásánál lesz a költség minimális?

f) Mikor (hány ezer termék gyártása esetén) lesz a termelés gazdaságos?

g) Mikor (hány ezer termék gyártása esetén) lesz a nyereség maximális?

G.3.5 Valamely termék x ezer darabjának előállítási költségét a

$$K : K(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}8x + 20$$

függvény, árbevételét pedig a

$$B : B(x) = 0{,}4x$$

függvény adja meg euróban, ahol $0 \le x \le 120$.

a) Ábrázoljuk a K és a B függvényt (közös koordinátarendszerben)!

b) Legalább hány terméket kell gyártanunk és értékesítenünk ahhoz, hogy a termelés nyereséges legyen?

c) Mekkora lesz a termelés során a nyereségünk? Adjuk meg és ábrázoljuk az N nyereség-függvényt?

d) Hány termék gyártásánál lesz a költség minimális?

e) Mikor (hány termék gyártása esetén) lesz a termelés gazdaságos?

f) Mikor (hány termék gyártása esetén) lesz a nyereség maximális?

G.3.6 Vázoljuk az alábbi racionális egész függvények (polinomok) grafikonját.

G.3.6.a) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$

G.3.6.b) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

G.3.6.c) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = x^5 - 13x^3 + 36x$

G.3.6.d) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$

G.3.6.e) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (4-x)(x-2)(x+1)(x+3)$

G.3.6.f) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)^2(x+1)(x+3)$

G.3.6.g) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)^2(x-2)(x+1)(x+3)$

G.3.6.h) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x+3)$

G.3.6.i) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)(x+3)^2$

G.3.6.j) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x+3)^2$

G.3.6.k) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)^2(x+1)(x+3)^2$

G.3.6.l) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)^2(x+1)^2(x+3)$

G.3.6.m) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)^2(x+1)^2(x+3)^2$

G.3.6.n) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)^2(x-2)^2(x+1)^2(x+3)^2$

G.3.6.o) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)^3(x+1)^4(x+3)$

G.3.6.p) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (4x - x^2 - 3)(x^2 + x - 2)(x^2 + 6x + 8)$

G.3.6.q) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^2-4x+3)(x^2+x-2)(x^2+6x+8)$

G.3.6.r) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^2-4x+3)(x^2+x-6)(x^2+5x+6)$

G.3.6.s) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^2-4x+3)(x^3+x^2-2x)$

G.3.6.t) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(5x^2-6x-x^3)(x^2+x-2)$

G.3.6.u) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(5x^2-x^3-6x)(x^2-x-2)$

G.3.6.v) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^3-5x^2+6x)(x^2-x-2)$

G.3.7 Vázoljuk az alábbi racionális törtfüggvények grafikonját.

G.3.7.a) f: $\mathbf{R}\backslash\{-3;\,2\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$

G.3.7.b) f: $\mathbf{R}\backslash\{-3;\,2\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$

G.3.7.c) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\,1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$

G.3.7.d) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\,1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{5x^2}{(x-1)(x+1)}$

G.3.7.e) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\,1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{4x-8}{(x-1)(x+1)}$

G.3.7.f) f: $\mathbf{R}\backslash\{1;\,3\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{4x-16}{(x-1)(x-3)}$

G.3.7.g) f: $\mathbf{R}\backslash\{-4;\,2\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(x-3)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+4)}$

G.3.7.h) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\,1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(x-5)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$

G.3.7.i) f: $\mathbf{R}\backslash\{2;\,4\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-4)}$

G.3.7.j) f: $\mathbf{R}\backslash\{2\}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-4x+4}$

G.3.7.k) f: $\mathbf{R}\backslash\{2\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4x+4}$

G.3.7.l) f: $\mathbf{R}\backslash\{2,\,4\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{5x^2-30x+45}{x^2-6x+8}$

G.3.7.m) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-6x+8}$

G.3.7.n) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-6}{6x-x^2-8}$

G.3.7.o) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{8x-36}{x^2-6x+8}$

G.3.7.p) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4x-6}{x^2-6x+8}$

G.3.7.q) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-20x+20}{x^2-1}$

G.3.7.r) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-20x+20}{(x-1)^2}$

G.3.7.s) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-30x+40}{(x-1)^2}$

G.3.7.t) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-20}{(x-1)^2}$

G.3.7.u) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 6\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-20x-60}{x^2-8x+12}$

G.3.7.v) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 6\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2-50x+120}{x^2-8x+12}$

G.3.7.w) f: $\mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x-24}{x-2}$

G.3.7.x) f: $\mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x-24}{2-x}$

G.3.7.y) f: $\mathbf{R}\backslash\{5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$

G.3.7.z) f: $\mathbf{R}\backslash\{-4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+4}$

G.3.7.aa) f: $\mathbf{R}\backslash\{-3, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4(x-5)(x+7)^2}{(x-2)^2(x+3)}$

4. Sorozatok, sorok

4.1 A számsorozat fogalma és tulajdonságai

Ebben a fejezetben a függvények egy speciális fajtájával fogunk megismerkedni – a számsorozattal: ez olyan függvény, amelyeknek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza (**N**) és értékkészlete a valós számok (**R**) halmazából kerül ki.

számsorozat

4.1 Definíció Az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ függvényt ***számsorozatnak*** nevezzük. Ekkor az $\langle a_n \rangle(k)$ jelölés helyett az a_k jelölést fogjuk alkalmazni.

A számsorozatot általában úgy adjuk meg, hogy megadjuk a sorozat *n*-edik elemének (tagjának) kiszámításához szükséges képletet.

4.2 Példa Legyen $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

E sorozat első néhány eleme:

$$a_0 = 1; \qquad a_1 = -\frac{1}{2}; \qquad a_2 = \frac{1}{3}; \qquad a_3 = -\frac{1}{4}; \qquad a_4 = \frac{1}{5}.$$

Mivel a számsorozatok speciális egyváltozós valós függvények, ezért rájuk vonatkozóan a fontosabb függvény-tulajdonságok az általánostól egyszerűbben megfogalmazhatók.

monoton növekvő sorozat

4.3 Definíció Az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ számsorozatot ***monoton növekvőnek*** nevezzük, ha minden n természetes számra $a_n \le a_{n+1}$. Amennyiben $a_n < a_{n+1}$, akkor ***szigorúan monoton növekvő*** sorozatról beszélünk.

monoton csökkenő sorozat

4.4 Definíció Az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ számsorozatot ***monoton csökkenőnek*** nevezzük, ha minden n természetes számra $a_n \ge a_{n+1}$. Amennyiben $a_n > a_{n+1}$, akkor ***szigorúan monoton csökkenő*** sorozatról beszélünk.

4.5 Példa Az

$$\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \frac{1}{n+1}$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő, a

$$\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ b_n = \frac{n}{n+1}$$

sorozat szigorúan monoton növekvő, azonban a 4.2 példában szereplő sorozat nem monoton.

4.6 Definíció Az $\langle a_n \rangle$: **N**→**R** számsorozatot ***felülről korlátosnak*** nevezzük, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbf{R}$, hogy minden *n* természetes számra $a_n \le \alpha$. Az α valós számot a sorozat ***felső korlátjának*** nevezzük. A legkisebb felső korlátot a számsorozat ***pontos felső korlátjának (felső határának, szuprémumának***) nevezzük, és $\sup\langle a_n \rangle$-nel jelöljük.

felülről korlátos sorozat

$\sup\langle a_n \rangle$

pontos felső korlát (supremum)

4.7 Definíció Az $\langle a_n \rangle$: **N**→**R** számsorozatot ***alulról korlátosnak*** nevezzük, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbf{R}$, hogy minden *n* természetes számra $\alpha \le a_n$. Az α valós számot a sorozat ***alsó korlátjának*** nevezzük. A legnagyobb alsó korlátot a számsorozat ***pontos alsó korlátjának (alsó határának, infimumának***) nevezzük, és $\inf\langle a_n \rangle$-nel jelöljük.

Ha egy számsorozat alulról és felülről is korlátos, akkor azt röviden korlátosnak mondjuk.

alulról korlátos sorozat

$\inf\langle a_n \rangle$

pontos alsó korlát, (infimum)

A 4.2 és a 4.5 példában szereplő sorozatok korlátosak, azonban például az

$$\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \frac{3n^2 + 3n + 2}{n+1}$$

sorozat felülről nem korlátos.

Most bevezetjük a határérték fogalmát, amely a matematikai analízis egyik legfontosabb fogalma, tulajdonképpen ezen alapszik a későbbi fejezetekben tárgyalandó differenciál- és integrálszámítás.

4.8 Definíció Az $\langle a_n \rangle$: **N**→**R** számsorozatot ***konvergensnek*** nevezzük, ha létezik olyan *A* valós szám, amelyre teljesül az alábbi állítás:

minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan n_ε természetes szám, hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon$ esetén teljesül az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ekkor az *A* számot a számsorozat ***határértékének*** nevezzük és a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ jelölést alkalmazzuk (olvasd: limesz *n* tart a végtelenbe a_n egyenlő *A*).

Azt is mondjuk továbbá, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat „tart” vagy „konvergál” az *A*-hoz, ε-t ***hibakorlátnak***, n_ε-t (az ε-hoz tartozó) ***küszöbszámnak*** nevezzük.

konvergens számsorozat

a sorozat határértéke

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

hibakorlát

küszöbszám

4.9 Példa Legyen $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Könnyen igazolható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Valóban, bármely pozitív ε-ra legyen $n_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Ekkor $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon .$$

Például $\varepsilon = 0{,}1$ esetén $n_\varepsilon = 9$, ugyanis

$$a_{10} = \frac{1}{11}; \qquad a_{11} = -\frac{1}{12}; \qquad a_{12} = \frac{1}{13}; \qquad a_{13} = -\frac{1}{14};$$

$\varepsilon = 0{,}01$ esetén $n_\varepsilon = 99$, mert

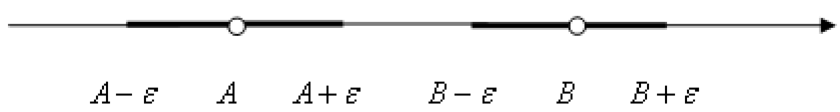
$$a_{100} = \frac{1}{101}; \qquad a_{101} = -\frac{1}{102}; \qquad a_{102} = \frac{1}{103}; \qquad a_{103} = -\frac{1}{104}.$$

Megjegyezzük, hogy a konvergencia fogalma megtalálható a gazdasági életben is. A napi híradásokban gyakran találkozhatunk az euro bevezetésének feltételéül szabott ún. „konvergencia-kritériumok” teljesüléséről – fontos gazdasági mutatóknak egy bizonyos időponttól (küszöbszám) kezdődően előre rögzített határok (hibakorlát) között kell maradniuk. A konvergencia-kritériumok teljesülése az euro bevezetésének szükséges (de nem elégséges) feltétele.

A számsorozatok vizsgálatához hasznos lesz számunkra az alábbi három állítás.

4.10 Tétel A konvergens számsorozatnak pontosan egy határértéke van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$: **N→R** számsorozatnak két határértéke van A, B és $A \neq B$. Legyen ε az A és B szám közötti „távolság” egyharmada: $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$. Ekkor az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ és a $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ intervallumok nem metszik egymást.



4.1 ábra

Abból a feltételezésből, hogy a számsorozat határértéke *A*, következik, hogy egy bizonyos indextől kezdődően a sorozat valamennyi tagja az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumon belül helyezkedik el. Feltételezésünk szerint azonban a számsorozat határértéke *B* is, vagyis egy bizonyos másik indextől kezdődően a sorozat valamennyi tagja a $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ intervallumon belül van. Ez viszont lehetetlen, mivel az ε kiválasztása szerint e két intervallumnak nincs közös pontja. Tehát feltételezésünk, miszerint a számsorozatnak két különböző határértéke van, ellentmondáshoz vezetett, ami bizonyítja a tétel állításának igaz voltát.

4.11 Tétel Ha a számsorozat konvergens, akkor korlátos.

Más szavakkal: Minden konvergens sorozat egyben korlátos is.

Bizonyítás. Legyen a számsorozat határértéke A és a rögzített pozitív ε-hoz tartozó küszöbszámot jelöljük m-mel. Ekkor a határérték definíciójából következik, hogy a sorozat valamennyi m-től nagyobb indexű tagja az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumon belül helyezkedik el, vagyis

$$A-\varepsilon < a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3} \cdots < A+\varepsilon$$

és így az $\{a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3} \cdots\}$ halmaz korlátos. Az $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ véges halmaz nyilvánvalóan korlátos, és így a számsorozatunk értékkészletéből álló

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3} \cdots\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\} \bigcup \{a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3} \cdots\}$$

halmaz korlátos. Állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő állítás megfordítása nem igaz, vagyis nem minden korlátos sorozat konvergens (például ilyen az $\langle a_n \rangle$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $a_n = (-1)^n$ sorozat). Azonban ha a számsorozatra a korlátosság mellett a monotonitás tulajdonsága is teljesül, akkor az ilyen sorozat konvergens. Következő állításunkat bizonyítás nélkül közöljük.

4.12 Tétel Ha a számsorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Ilyenkor a monoton növekvő sorozat határértéke nem más, mint annak pontos felső korlátja és a monoton csökkenő sorozat határértéke megegyezik annak pontos alsó korlátjával.

4.13 Példa Definiáljuk az alábbi állításokat:

A – a számsorozat konvergens,

B – számsorozat korlátos,

C – a számsorozat monoton.

Fejezzük ki logikai műveletekkel az előző két tételben szereplő állítást.

Megoldás: 4.11 tétel – $A \Rightarrow B$,

4.12 tétel – $(C \wedge B) \Rightarrow A$.

4.14 Definíció ***Divergensnek*** nevezzük azt a számsorozatot, amely nem konvergens. ***divergens sorozat***

Divergens például a már említett $\langle a_n \rangle$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $a_n = (-1)^n$ sorozat, ugyanis e sorozat valamennyi páratlan indexű tagja –1 és valamennyi páros indexű tagja 1. Tehát a –1-nek és az 1-nek is például a 0,5-sugarú környezetében sorozatunknak végtelen sok tagja helyezkedik el, ezért a sorozat nem lehet konvergens.

4.15 Példa Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából az

$$\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \frac{6n+1}{2n+7}$$

számsorozatot, konvergencia esetén $\varepsilon = 0{,}01$-hoz keressük meg a küszöbszámot!

Először is számítsuk ki a sorozat egynéhány elemét:

$$a_0 = \frac{1}{7},\ a_1 = \frac{7}{9},\ a_2 = \frac{13}{11},\ a_3 = \frac{19}{13},\ a_4 = \frac{25}{15},\ a_5 = \frac{31}{17}.$$

Úgy tűnik, hogy ez a sorozat szigorúan monoton növekvő. Igazoljuk ezt, vagyis az $a_n < a_{n+1}$ egyenlőtlenséget!

$$\frac{6n+1}{2n+7} < \frac{6(n+1)+1}{2(n+1)+7}, \quad \frac{6n+1}{2n+7} < \frac{6n+7}{2n+9}, \quad (6n+1)(2n+9) < (6n+7)(2n+7)$$

Az utolsó egyenlőtlenségben, felbontva a zárójeleket, a nyilvánvalóan minden természetes n számra teljesülő

$$12n^2 + 56n + 9 < 12n^2 + 56n + 49$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Tehát sorozatunk valóban szigorúan monoton növekvő. Ezért alulról korlátos, és pontos alsó korlátja $a_0 = \frac{1}{7}$. Vajon felülről korlátos-e ez a sorozat? Első ránézésre azt mondanánk, hogy nem. Hogyan lehet felülről korlátos egy szigorúan monoton növekvő számsorozat, hiszen

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots.$$

Azonban könnyű belátni, hogy a sorozat minden tagja kisebb, mint 100 és kisebb, mint 10. Sőt $a_n = \frac{6n+1}{2n+7}$<3, mivel $6n+1 < 3(2n+7) = 6n+21$. Vajon van-e a sorozatnak a 3-tól kisebb felső korlátja? Felső korlát-e például 2,99? Nem, mivel például $a_{1000} = 2{,}990034878 > 2{,}99$. Felső korlát-e 2,9999? Nem, mivel például $a_{100000} = 2{,}999900003 > 2{,}9999$. Akármilyen kis pozitív ε-t is választunk, a $3-\varepsilon$ már nem lesz felső korlátja sorozatunknak. Valóban, átalakítva az $|a_n - 3| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left|\frac{6n+1}{2n+7} - 3\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{6n+1-3(2n+7)}{2n+7}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{6n+1-6n-21}{2n+7}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{-20}{2n+7}\right| < \varepsilon.$$

Felbontva az abszolút-értéket és az n ismeretlenre nézve megoldva az egyenlőtlenséget lépésről lépésre kapjuk, hogy:

$$\frac{20}{2n+7} < \varepsilon, \quad \frac{20}{\varepsilon} < 2n+7, \quad 2n > \frac{20}{\varepsilon} - 7, \quad n > \frac{20}{2\varepsilon} - \frac{7}{2} = \frac{10}{\varepsilon} - 3{,}5\ .$$

Vagyis minden olyan n-re, amely nagyobb, mint $n_\varepsilon = \frac{10}{\varepsilon} - 3{,}5$ egész része teljesül az $|a_n - 3| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ezzel tulajdonképpen azt is bebizonyítottuk, hogy sorozatunk határértéke egyenlő 3-mal. Valóban, minden pozitív ε-hoz létezik olyan n_ε szám (az előbbiek szerint $n_\varepsilon = \frac{10}{\varepsilon} - 3{,}5$ egész része), hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n > n_\varepsilon$ esetén teljesül az $|a_n - 3| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Összefoglalva a fentieket, és válaszolva a feltett kérdésekre elmondhatjuk, hogy:

a számsorozat szigorúan monoton növekvő,

a számsorozat korlátos, pontos alsó korlátja $a_0 = \frac{1}{7}$ és pontos felső korlátja 3;

a számsorozat konvergens és határértéke 3;

az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám 996.

Ez utóbbi szemléletes alátámasztására kiszámítjuk sorozatunk 996-ik és 997-ik elemét:

$$a_{996} \approx 2{,}989994997 < 2{,}99,\ a_{997} \approx 2{,}990004998 > 2{,}99.$$

4.16 Példa Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából az

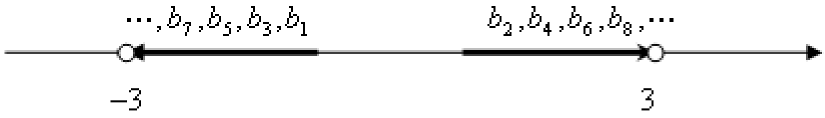
$$\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ b_n = (-1)^n \frac{6n+1}{2n+7}$$

számsorozatot, konvergencia esetén $\varepsilon = 0{,}01$-hoz keressük meg a küszöbszámot!

Először itt is felírjuk a sorozat első néhány elemét:

$$b_0 = \frac{1}{7},\ b_1 = -\frac{7}{9},\ b_2 = \frac{13}{11},\ b_3 = -\frac{19}{13},\ b_4 = \frac{25}{15},\ b_5 = -\frac{31}{17}.$$

Nyilván a sorozat nem monoton. Könnyen észrevehető, hogy e sorozat minden páros indexű tagja megegyezik a 4.15 példában szereplő sorozat azonos sorszámú tagjával és minden páratlan indexű tagja megegyezik az említett sorozat azonos indexű tagjának ellentettjével: $b_n = \frac{6n+1}{2n+7}$, ha $n = 0,2,4,6,8,\cdots$ és $b_n = -\frac{6n+1}{2n+7}$, ha $n = 1,3,5,7,9\cdots$.
Az előző példában elmondottakat figyelembe véve kapjuk, hogy a sorozat páros indexű tagjai monoton növekedve tartanak balról a 3-hoz és a páratlan indexű tagok monoton csökkenve tartanak jobbról a –3-hoz. Vagyis a sorozat divergens. Ilyenkor a 3 és a –3 számokat a ***számsorozat torlódási pontjainak*** szokás nevezni. A fentiekből az is kiderül, hogy a sorozat korlátos: pontos alsó korlátja –3 és pontos felső korlátja 3. Az elmondottakat az alábbi ábra szemlélteti.



4.2 ábra

4.2 A konvergens számsorozat tulajdonságai

Az előzőekben láttuk, hogy minden konvergens sorozat korlátos valamint minden monoton és korlátos sorozat konvergens. Ismerkedjünk meg a konvergens számsorozat néhány további tulajdonságával. E tulajdonságok hasznosak lesznek számunkra a sorozatok határértékeinek kiszámításához.

4.17 Tétel Legyen az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ számsorozat határértéke 0 és a $\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat korlátos. Ekkor az $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Bizonyítás. Mivel a $\langle b_n \rangle$ sorozat korlátos, ezért létezik olyan K valós szám, amelyre $|b_n| \le K$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ feltételezésből következik, hogy minden pozitív valós számhoz – így az $\dfrac{\varepsilon}{K}$-hoz is – létezik olyan n_ε természetes szám, amelyre minden $n \in \mathbf{N}, n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$. Állításunkat igazoltuk.

4.18 Tétel Legyen az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ konvergens számsorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Minden k valós számra a $\langle k \cdot a_n \rangle$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = kA$.

Bizonyítás. $k = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen $k \ne 0$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ feltételezésből következik, hogy minden pozitív valós számhoz – így az $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$-hoz – is létezik olyan n_ε természetes szám, amelyre minden $n \in \mathbf{N}, n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$. Ekkor

$$|ka_n - kA| = |k| \cdot |a_n - A| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = kA$. Állításunkat igazoltuk.

4.19 Tétel Legyen az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ és a $\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ konvergens számsorozat, továbbá $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor:

(1) az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B;$$

(2) az $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B;$$

(3) $B \neq 0$ és $b_n \neq 0$ esetén az $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

műveleti tételek

Bizonyítás. (1) Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor minden pozitív $\frac{\varepsilon}{2}$ valós számhoz létezik olyan $n_{a,\varepsilon}$ és $n_{b,\varepsilon}$ természetes szám, hogy minden $n_{a,\varepsilon}$-nál nagyobb n-re

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

és minden $n \in \mathbf{N},\ n > n_{b,e}$ esetén

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelölje n_ε a nagyobbikat az $n_{a,\varepsilon}$ és $n_{b,\varepsilon}$ számok közül. Ekkor minden $n \in \mathbf{N},\ n > n_\varepsilon$ esetén teljesül mindkét egyenlőtlenség, továbbá a két szám összegének abszolút értékére vonatkozó

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

tulajdonság alapján

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Most nézzük a sorozatok szorzatának határértékét. Könnyen igazolható, hogy a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ egyenlőség ekvivalens a $\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$ összefüggéssel. Vizsgáljuk meg az $(a_n \cdot b_n - A \cdot B)$ sorozatot, és bizonyítsuk be, hogy a határértéke 0. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$a_n \cdot b_n - A \cdot B = a_n \cdot b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - A \cdot B = (a_n - A) \cdot b_n + A \cdot (b_n - B).$$

Ezen egyenlőség jobb oldalának első tagja egy 0-hoz konvergáló $\langle a_n - A \rangle$ és a konvergens $\langle b_n \rangle$ sorozat szorzata. A 4.11 tétel értelmében a $\langle b_n \rangle$ korlátos sorozat, így alkalmazva 4.17 tételt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - A) b_n = 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} A(b_n - B) = 0.$$

Mivel tételünk (1) pontja értelmében a konvergens sorozatok összegének határértéke megegyezik a határértékek összegével, kapjuk hogy

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n - AB) = \lim_{n\to\infty}(a_n - A)b_n + \lim_{n\to\infty} A(b_n - B) = 0 + 0 = 0$$

vagyis $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$ **.** A hányadosra vonatkozó állítás bizonyításától eltekintünk. A tétel bizonyítását befejeztük.

A fenti tételeket gyakran alkalmazzák a határértékek kiszámításához.

4.20 Példa Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}\dfrac{7n^2 - 6n + 5}{4n^2 + 3n - 2}$ határértéket!

Ilyen racionális törtfüggvény alakú határértékek kiszámolásához a számlálóban és a nevezőben lévő összegből vigyük ki a zárójel elé az *n*-nek a legnagyobb kitevőjű hatványát, jelen esetben az n^2-et:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2 - 6n + 5}{4n^2 + 3n - 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(7 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}.$$

Könnyen látható, hogy n^2-re lehet egyszerűsíteni, továbbá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.$$

Ezért a 4.18 és a 4.19 tételek alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2 - 6n + 5}{4n^2 + 3n - 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{7 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{7}{4}.$$

A konvergens sorozatok tanulmányozásához szükségünk lehet a divergens sorozatok vizsgálatára is.

Külön figyelmet érdemel a divergens sorozatok egy speciális fajtája.

4.21 Definíció Az $\langle a_n \rangle$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ számsorozat $+\infty$-hez ($-\infty$-hez) divergál, vagy azt is mondjuk, hogy a határértéke plusz végtelen (mínusz végtelen), ha igaz a következő állítás:

minden α valós számhoz létezik olyan n_α természetes szám, hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n > n_\alpha$ esetén teljesül az $\alpha < a_n$ ($a_n < \alpha$) egyenlőtlenség.

Jele: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ illetve $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

A definíció alapján könnyen igazolható az alábbi – a határértékek kiszámításához hasznos – állítás.

4.22 Tétel Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

A továbbiakban nézzünk néhány nevezetes számsorozatot, illetve határértéket.

4.3 Nevezetes számsorozatok

Először egy nem csak a matematikában, de a pénzügyi számításban is fontos szerepet betöltő számsorozattal ismerkedünk meg. Ehhez azonban szükségünk lesz bizonyos kamatszámítással kapcsolatos ismeretekre.

4.23 Példa Tegyük fel, hogy most elhelyeztünk a takarékba $K_0 = 500\,000$ Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz a mostantól számított harmadik év végén, ha az éves kamatláb 9%? Mennyi pénzünk lesz az n-edik év végén?

Az első év végén tőkénk után a pénzintézet 45 000 Ft kamatot fizet (az 500 000 forint 9%-át), azaz az első és végére összesen

$$K_1 = 545000 = 500000 + 45000 = K_0 + K_0 r = K_0(1+r), \text{ ahol } r = 0{,}09$$

összegünk lesz a takarékban. Így a második év elején $K_1 = 545000$ Ft-unk lesz és ennek az év végi kamata $K_1 r = 545000 \cdot 0{,}09 = 49050$ Ft. Vagyis a második év végére a tőkénk már

$$K_2 = 594050 = 545000 + 49050 = K_1 + K_1 r = K_1(1+r) = K_0(1+r)^2$$

összegre növekszik. Hasonlóan kapjuk, hogy a harmadik év végén

$$K_3 = K_2 + K_2 r = K_2(1+r) = K_0(1+r)^3 = 500000 \cdot 1{,}09^3 = 500000 \cdot 1{,}29503 = 647515$$

Ft-unk lesz a takarékban. Az elmondottakból könnyen látszik és teljes matematikai indukcióval bizonyítható az alábbi állítás.

kamatos kamat számítás

4.24 Tétel Az évenkénti *p%*-os kamattal növekvő jelenlegi K_0 összeg az *n*-edik év végére

$$K_n = K_0(1+r)^n, \qquad (r = p/100)$$

összegre változik (amely természetesen nagyobb K_0-nál).

4.25 Példa Tegyük fel, hogy van $K_0 = 1$ mFt-unk és valamilyen banknál elhelyezhetjük azt éves 100%-os kamatláb mellett (de jó lenne!). Ekkor az év végére $K_1 = 2$ mFt-unk lesz.

Tegyük fel, hogy valamely más bank félévenkénti 50%-os kamatot ígér. E bankba helyezve pénzünket a 4.24 tétel alapján az év végére

$$K_2 = K_0(1+0{,}5)^2 = 2{,}25$$

millió forintunk lenne.

Tegyük fel, hogy egy harmadik bank negyedévenkénti 25%-os kamatot ígér. Ezzel a kínálattal élve, ugyancsak a 4.24 tétel alapján az év végére

$$K_4 = K_0(1+0{,}25)^4 = 2{,}441$$

millió forintunk lenne. Folytatva ezt a gondolatmenetet havi $\frac{100}{12}$%-os kamattal számolva az év végén

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}61303529$$

millió forintunk, és napi $\frac{100}{365}$%-os kamattal számolva az év végén

$$K_{365} = K_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714516025$$

millió forintunk lesz. Látszik, hogy növelve a kamatidőszakok számát egy adott éven belül egyre több pénzhez juthatunk.

Itt van a határtalan meggazdagodás lehetősége?

A választ erre a kérdésre az

$$\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \; a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat vizsgálata adja. Bizonyítható (a fenti példából is látszik), hogy ez a számsorozat szigorúan monoton növekvő, továbbá felülről korlátos. Így a 4.12 tételből következik, hogy konvergens, vagyis van határértéke. E sorozat határértékét ***Euler-féle számnak*** nevezik és *e* betűvel jelölik. Ez egy irracionális szám, közelítő értéke $e \approx 2{,}7182818284591$.

4.26 Tétel

Euler-féle

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182818284591.$$

4.27 Tétel Tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

szám

az

e

szám

4.28 Példa Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n+3}$ határértéket!

A megoldáshoz először is vegyük észre, hogy a zárójelben lévő kifejezés határértéke

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+4}{7n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n\left(1+\frac{4}{7n}\right)}{7n\left(1-\frac{5}{7n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4/7}{n}\right)}{\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4/7}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

míg a $2n+3$ kitevő a $+\infty$-be divergál. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy 1^∞ típusú határértéket kell megállapítanunk. A hatványozás azonosságait alkalmazva a 4.18 és 4.19 tételek alapján

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^3\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^3.$$

Mint fentebb beláttuk, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+4}{7n-5}=1$, ezért a kapott szorzatban szereplő második határérték egyenlő 1-gyel. Számításainkat folytatva kapjuk

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{4/7}{n}\right)}{\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4/7}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4/7}{n}\right)^n\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)^n\right)}\right)^2.$$

Most már, alkalmazva a 4.27 tételt és a hatványozás azonosságait, könnyen befejezhetjük számításainkat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-5}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4/7}{n}\right)^n\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5/7}{n}\right)^n\right)}\right)^2 = \left(\frac{e^{4/7}}{e^{-5/7}}\right)^2 = \left(e^{9/7}\right)^2 = e^{18/7}.$$

Folytassuk egyes nevezetes határérték típusok vizsgálatát! A 4.20 példában kiszámítottuk a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-6n+5}{4n^2+3n-2}=\frac{7}{4}$$

határértéket és beláttuk, hogy az ilyen racionális törtfüggvény alakú határérték nagymértékében függ a számláló és a nevező fokszámától. Ennek további alátámasztására nézzük az alábbi példákat.

4.29 Példa Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-6n+5}{4n^3+3n-2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-6n+5}{4n^2+3n-2}\quad \text{és a}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{-7n^3-6n+5}{4n^2+3n-2}$$

határértékeket! A 4.20 példában említett eljárást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-6n+5}{4n^3+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(7-\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(4+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{4n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{4n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-6n+5}{4n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(7-\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{4}=+\infty$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-7n^3-6n+5}{4n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-7-\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n^3}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n}{4}=-\infty.$$

Most vizsgáljuk meg az

$$\langle a_n\rangle:\mathbf{N}\to\mathbf{R},\ a_n=q^n,\ \text{ahol}\ q\in\mathbf{R}$$

számsorozatot. Ez a sorozat nagymértékben hasonlít a harmadik fejezetben már ismertetett exponenciális függvényre, $q>0$ esetén annak leszűkítése a természetes számok halmazára. Ennek felhasználásával és e fejezetben megszerzett ismereteinket felhasználva könnyen bizonyítható az alábbi állítás.

4.30 Tétel

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q>1 \\ 1, & \text{ha } q=1 \\ 0, & \text{ha } |q|<1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q\le 1 \end{cases}$$

4.31 Példa Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^n}{8\cdot 4^n + 5\cdot 3^{2n+1}}$$

határértéket!

Először is vegyük észre, hogy

$$5\cdot 3^{2n+1} = 5\cdot 3^{2n}\cdot 3^1 = 5\cdot 9^n\cdot 3 = 15\cdot 9^n,$$

majd a tört számlálójából és nevezőjéből is vigyük ki zárójel elé az *n*-nek a legnagyobb alapú hatványát, esetünkben a 9^n-t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^n}{8\cdot 4^n + 5\cdot 3^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^n}{8\cdot 4^n + 15\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n\left(7-6\cdot\frac{5^n}{9^n}\right)}{9^n\left(8\cdot\frac{4^n}{9^n}+15\right)}$$

Nyilván 9^n-re lehet egyszerűsíteni, továbbá a 4.30 tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^n}{8\cdot 4^n + 5\cdot 3^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^n}{8\cdot 4^n + 15\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n\left(7-6\cdot\frac{5^n}{9^n}\right)}{9^n\left(8\cdot\frac{4^n}{9^n}+15\right)} = \frac{7-6\cdot 0}{8\cdot 0+15} = \frac{7}{15}.$$

4.4 A valós számsor

Fejezetünket egy kitalált történettel kezdjük. *Egy matematikus elmegy a bankárhoz, és felajánlja, hogy befizet a bankár számlájára október hónap minden napján 100 000 forintot. Cserébe csak annyit kér, hogy a bankár naponta írjon jóvá a matematikus számláján elsején egy fillért, másodikán két fillért, harmadikán négy fillért, negyedikén 8 fillért, ötödikén 16 fillért, és így tovább az egész hónapban, minden nap az előző napi jóváírás dupláját. A bankár örömmel elfogadja az ajánlatot. Ki jár jobban (Őrült ez a matematikus)? A választ az olvasótól várjuk, de ne hamarkodja azt el! Mi van akkor, ha a történet februárban játszódik?*

Segítségül megoldjuk a következő feladatot, amiből általánosítással kapjuk majd a 4.33 tételt.

4.32 Példa Tegyük fel, hogy ebben (a nulladik) évben egy vállalat bevétele $a_0 = 100$ mFt, a bevételét a vállalat az elkövetkező három évben évente p=6%-kal tervezi növelni. Mekkora lesz a vállalat bevétele a harmadik évben, és mekkora az összes bevétel a négy éves időszak alatt?

Legyen $r = p/100 = 0{,}06$ és $q = 1 + r = 1{,}06$. Ekkor a 4.23 példában közölt számításokhoz hasonlóan kapjuk, hogy a vállalatnak az első évben

$$a_1 = a_0 \cdot q = 100 \cdot 1{,}06 = 106,$$

a másodikban

$$a_2 = a_0 \cdot q^2 = 100 \cdot 1{,}06^2 = 112{,}36$$

és a harmadik évben

$$a_3 = a_0 \cdot q^3 = 100 \cdot 1{,}06^3 = 119{,}1016$$

mFt lesz a bevétele. Így összesen a négy év alatt a vállalat

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 =$$
$$= 100+106+112{,}36+119{,}1016 = 437{,}4616$$

mFt bevételre tesz szert. Ezeket a számításokat könnyen elvégezhetjük számológép segítségével.

Általánosítva, ily módon n+1 év elteltével (a nulladik évet is beszámítva) a vállalat összbevétele

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^n$$

mFt lesz. Az ilyen összeget *q* ***kvóciensű véges geometriai sornak*** is szokták nevezni.

Nagy n esetén az s_n kiszámítása nehézkes. Keresünk erre egy egyszerűbb képletet. Ehhez nézzük a $q \cdot s_n$ kifejezést

$$q \cdot s_n = q \cdot a_0 + q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + \cdots + q \cdot a_n = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^{n+1}$$

és vonjuk ki belőle az s_n összeget. Elvégezve a számításokat, a következőt kapjuk:

$$q \cdot s_n - s_n =$$
$$= a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^n + a_0 \cdot q^{n+1} -$$

$$-(a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \dots + a_0 \cdot q^n) =$$
$$= a_0 \cdot q^{n+1} - a_0 .$$

Tehát

$$q \cdot s_n - s_n = a_0 \cdot q^{n+1} - a_0 ,$$

mivel minden más tag kiesik. Ha $q = 1$, akkor az s_n összegben minden összeadandó egyenlő a_0-val és $s_n = a_0(n+1)$. Tegyük fel, hogy $q \neq 1$. Ekkor

$$q \cdot s_n - s_n = (q-1) \cdot s_n = a_0 \cdot q^{n+1} - a_0$$

és

$$s_n = \frac{a_0 \cdot q^{n+1} - a_0}{q-1} = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} .$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást.

4.33 Tétel (A véges geometriai sor összege). Legyen $a_0 \in \mathbf{R}$ és $q \neq 1$. Ekkor

$$s_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \dots + a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} .$$

a véges geometriai sor összege

Elérkeztünk a valós számsor fogalmának bevezetéséhez.

4.34 Definíció Az $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozatból képzett

$$\langle s_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \; s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

sorozatot az $\langle a_n \rangle$ sorozatból alkotott ***valós számsornak*** nevezzük és

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{vagy} \quad \sum_{0}^{\infty} a_n$$

szimbólummal jelöljük. Ekkor a_n-t a sor *n*-edik tagjának, s_n-t pedig a sor *n*-edik részletösszegének nevezzük. Ha az $\langle s_n \rangle$ sorozatnak létezik (véges) határértéke, akkor ezt a ***valós számsor összegének*** nevezzük, és azt mondjuk, hogy valós számsor ***konvergens.*** Ellenkező esetben ***divergens*** sorról beszélünk.

valós számsor

a valós számsor összege

Pénzügyi számításoknál gyakran előfordul, így különös figyelmet érdemel az alábbi speciális valós számsor.

végtelen geometriai sor

4.35 Definíció Legyen $a_0 \in \mathbf{R}$. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^n + \cdots$$

valós számsort ***végtelen geometriai sornak*** nevezzük.

A definíció alapján valamint a 4.33 tételt felhasználva kapjuk, hogy a végtelen geometriai sor összege egyenlő

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{1-q} - \frac{a_0 q}{1-q} \cdot q^n\right).$$

Az utóbbi, zárójelben kapott kifejezésnek $n \to \infty$ esetén – a 4.30 tétel szerint – csak akkor létezik véges határértéke, ha $|q| < 1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást.

végtelen geometriai sor összege

4.36 Tétel Legyen $a_0 \in \mathbf{R}$ és $|q| < 1$. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^n + \cdots$$

végtelen geometriai sor konvergens és összege egyenlő

$$a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^n + \cdots = \frac{a_0}{1-q}.$$

Ellenőrző kérdések a 4. fejezethez

E.4.1 A monoton növekvő sorozat definíciója.
E.4.2 A monoton csökkenő sorozat definíciója.
E.4.3 A számsorozat pontos felső korlátjának definíciója.
E.4.4 A számsorozat pontos alsó korlátjának definíciója.
E.4.5 Lehet-e egy monoton növekvő (csökkenő) sorozat alulról/felülről nem korlátos?
E.4.6 A konvergens számsorozat (a határérték) definíciója.
E.4.7 Fogalmazzuk meg a számsorozat konvergenciájának, korlátosságának és monotonitásának kapcsolatáról szóló tételeket.
E.4.8 Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a konvergens számsorozatokról szóló tételeket!
E.4.9 Adjuk meg annak a definícióját, hogy a számsorozat határértéke plusz (mínusz) végtelen.
E.4.10 A kamatos kamat számításának képlete.
E.4.11 Az Euler-féle szám definíciója.
E.4.12 A véges geometriai sor összegének képlete.
E.4.13 A valós számsor definíciója.
E.4.14 A végtelen geometriai sor összegének képlete.

Gyakorló feladatok a 4. fejezethez

G.4.1 Végezzük el az alábbi számsorozatok teljes vizsgálatát (monotonitás, korlátosság, konvergencia; konvergencia esetén adott ε-hoz keressünk küszöbszámot)!

G.4.1.a) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{9n-5}{3n+7}$. ($\varepsilon = 0{,}1; \varepsilon = 0{,}01; \varepsilon = 0{,}001$)

G.4.1.b) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{9n-5}{3n+7}$.

G.4.1.c) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{8n+17}{4n+3}$. ($\varepsilon = 0{,}1; \varepsilon = 0{,}01; \varepsilon = 0{,}001$)

G.4.1.d) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{8n+17}{4n+3}$.

G.4.1.e) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{7n+17}{n^2+2n+3}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.f) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{7n+17}{n^2+2n+3}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.g) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{9n+17}{3n-n^2+5}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.h) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{9n+17}{3n-n^2+5}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.i) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{12n+16}{n-3n^2-2}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.j) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{12n+16}{n-3n^2-2}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.k) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{7n+9}{5n-n^2-2}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.l) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{9n^2+3n+12}{3n^2-8n-9}$. ($\varepsilon = 0{,}01$)

G.4.1.m) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{12n^2+6n+3}{2n^2-12n-6}$. ($\varepsilon = 0{,}1$)

G.4.1.n) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{6n^2-13n+17}{5n-2n^2+7}$. ($\varepsilon = 0{,}001$)

G.4.1.o) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{6n^2 - 15n + 17}{5n + 7}$.

G.4.1.p) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ a_n = (-1)^n \dfrac{6n^2 - 15n + 17}{5n + 7}$.

G.4.2 Vizsgáljuk meg konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat, konvergencia esetén $\varepsilon = 0{,}01$-hoz keresünk küszöbszámot!

G.4.2.a) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{6n^2 + 2n + 4}{3n^2 - 5n - 7}$

G.4.2.b) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{8n^2 + 3n + 9}{2n^2 - 5n - 7}$

G.4.2.c) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{9n^2 - 6n + 3}{3n^2 - 7n - 8}$

G.4.2.d) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{8n + 3}{2n + 7}$

G.4.2.e) $\langle b_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ b_n = (-1)^n \dfrac{8n + 3}{2n + 7}$

G.4.2.f) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{8n + 9}{4n - 3}$

G.4.2.g) $\langle b_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ b_n = (-1)^n \dfrac{8n + 9}{4n - 3}$

G.4.2.h) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{8n + 4}{2n^2 + 7n + 3}$

G.4.2.i) $\langle b_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ b_n = (-1)^n \dfrac{8n + 4}{2n^2 + 7n + 3}$

G.4.3 Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

G.4.3.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + 5n - 6}{9n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n + 5n^2 - 6}{9n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 + 4n - 6}{3n - 2n^2 - 7}$

G.4.3.d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + 8n - 6}{3n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2 + 5n^3 - 6}{3n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 5n^3 - 6}{9n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 5n^4 - 6}{9n^2 - 2n^5 - 7n}$

G.4.3.m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n + 5n^2 - 6}{9n^2 - 2n^3 - 7}$

G.4.3.n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 + 4n - 6}{3n - 2n^3 - 7}$

G.4.3.o) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{4n + 5n^2 - 6}{9n^2 - 2n^3 - 7}$

G.4.3.p) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{4n^2 + 8n - 6}{3n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.q) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{4n^2 - 5n^3 - 6}{9n^2 - 2n - 7}$

G.4.3.g) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{7n-2}\right)^{2n+3}$

G.4.3.h) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{5n-2}\right)^{2n+3}$

G.4.3.i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{5n-2}\right)^{3n+123}$

G.4.3.j) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{5+7n}\right)^{2n+4}$

G.4.3.k) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{5-7n}\right)^{2n+4}$

G.4.3.r) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{5-7n}\right)^{2n+3}$

G.4.3.s) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{2-5n}\right)^{4n-3}$

G.4.3.t) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+7}{9n-5}\right)^{3n+5}$

G.4.3.u) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+3}{8n-7}\right)^{5n+6}$

G.4.3.v) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+5}{3-8n}\right)^{2n+3}$

5. Pénzügyi és gazdaságossági számítások

5.1 A pénz időértéke

Mindenek előtt felhívjuk az olvasó figyelmét a következő nagyon fontos dologra. A fizetési kötelezettségek teljesítése esetében a fizetendő összeg nagysága mellett a fizetés esedékességének időpontja (a „mikor”) is fontos szerepet játszik. A jelenlegi pénz többet ér, mint a nominálisan ugyanannyi jövőbeli pénz (egy forint többet ér ma, mint egy forint holnap). Ennek okai többek között a következők:

- az infláció,
- a fogyasztó idő preferenciája,
- a jelenlegi pénz hozammal gyarapodhat,
- a mai pénz likviddé tesz.

A pénz időértékét a kamattal szokás jellemezni.

5.1.1 Az egyszerű és a kamatos kamat számítása

kamat

A ***kamat*** a kölcsön után az adós által időarányosan fizetendő pénzösszeg.

kamatláb
kamatidő

A ***kamatláb*** 100 pénzegység egy meghatározott időre (kamatidőre) vonatkozó kamata.

egyszerű kamat

Egyszerű kamatnak hívjuk azt a kamatot, amelyet csak egy kamatidőre vagy annak egy részére számítunk. A kamatidőt általában egy évnek szokták venni, ilyenkor egy évet 360 napnak és egy hónapot 30 napnak számítanak.

az egyszerű kamat számítása

5.1 Tétel Legyen az éves kamatláb *p%*. Ekkor a jelenlegi K_0 összeg n ($n \le 360$) napra esedékes kamata

$$K_n = K_0 \cdot r \cdot \frac{n}{360}, \qquad \text{ahol} \quad r = p/100,$$

illetve m ($m \le 12$) hónapra esedékes kamata

$$K_m = K_0 \cdot r \cdot \frac{m}{12}, \qquad \text{ahol} \quad r = p/100.$$

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban általában havi kamatozás esetén a kamatjóváírás függ a hónap napjainak számától, vagyis januárban 31 napra vonatkozó kamatot, míg februárban 28 napra esedékes kamatot írnak jóvá betétszámlánkon (ilyenkor egy évet 365 napnak számítanak). Az elmondottakat a következő példa szemlélteti.

5.2 Példa Legyen az éves kamatláb 8%. Ekkor 100 000 Ft kamata február hónapra

$$K_{febr} = 100000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{28}{365} = 614 \text{ Ft},$$

március hónapra

$$K_{márc} = 100000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{31}{365} = 679 \text{ Ft}$$

és április hónapra

$$K_{ápr} = 100000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{30}{365} = 658 \text{ Ft}.$$

Az előző fejezetben igazoltuk (lásd: 4.24 tétel), de a teljesség kedvéért megismételjük az alábbi állítást.

5.3 Tétel Az évenkénti *p%*-os kamattal növekvő jelenlegi K_0 összeg az *n*-edik év végén

$$K_n = K_0(1+r)^n, \qquad (r = p/100)$$

összegre gyarapodik fel.

kamatos kamat számítás

5.4 Példa Egy elektromos berendezés vásárlására két árajánlatot kaptunk:

1. a vásárláskor fizetünk 200 000 Ft-ot;
2. a vásárláskor 100 000 Ft-ot fizetünk, majd két év múlva kell fizetnünk újabb 121 000 Ft-ot.

Melyik a kedvezőbb ajánlat, ha az éves kamatláb 12%?

A megoldáshoz többféleképpen juthatunk el.

Tegyük fel, hogy rendelkezünk 200 000 Ft-tal, de mégis a második fizetési lehetőséget választjuk. Ekkor az ár első részletének kifizetése után megmaradt 100 000 Ft-ot elhelyezhetjük a takarékba. Ez az összeg két év alatt éves 12%-os kamatláb mellett (az 5.3 tétel alapján) $100\,000 \cdot 1{,}12^2 = 125\,440$ Ft-ra gyarapodik fel. Ebből könnyen ki tudjuk fizetni az esedékes 121 000 Ft-ot, még 4 440 Ft meg is marad. Tehát a második ajánlat a kedvezőbb.

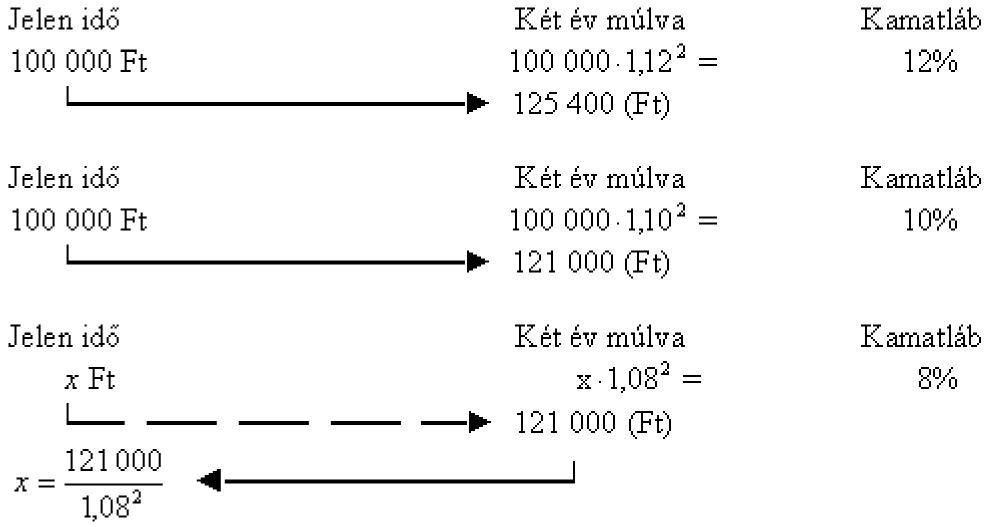
Vizsgáljuk meg a két árajánlatot más kamatlábakat feltételezve.

Legyen az éves kamatláb 10%. Ekkor a 100 000 Ft két év múlva $100\,000 \cdot 1{,}10^2 = 121\,000$ Ft-t ér, és így a két árajánlat pontosan megegyezik egymással.

Tegyük fel, hogy az éves kamatláb 8%. Talán a fentiek alapján sejthető, hogy az első árajánlat a kedvezőbb (természetesen, ha rendelkezünk a megfelelő összeggel). Valóban, ha csak 200 000 Ft-tal rendelkezünk, a második fizetési módot nem tudjuk teljesíteni, mivel az első részlet kifizetése után a megmaradt 100 000 Ft az éves 8%-os kamatláb mellett két év alatt mindössze $100\,000 \cdot 1{,}08^2 = 116\,640$ Ft-ra növekszik fel. De mennyi pénzzel kell rendelkeznünk most ahhoz, hogy teljesíteni tudjuk a második fizetési ajánlatot? Másképpen fogalmazva: mennyit ér ma a két év múlva esedékes 121 000 Ft? A választ az $x \cdot 1{,}08^2 = 121\,000$ egyenletből kapjuk:

$$x = \frac{121\,000}{1{,}08^2} = 121\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^2 = 103\ 738 \text{ Ft.}$$

Elvégzett számításainkat az alábbi ábra szemlélteti:



5.1 ábra

Általánosan is feltehetjük a kérdést: mennyit ér ma az n év múlva esedékes K_n összeg? A kérdésre a választ az ún. diszkontálás adja: egyszerűen az 5.3 tételben szereplő összefüggésből fejezzük ki a K_0 értéket.

5.1.2 Diszkontálás

diszkontált érték

5.5 Tétel Az n év múlva esedékes K_n összeg mai értéke p%-os éves kamatláb mellett

$$K_0 = K_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n, \qquad \text{ahol } r = p/100.$$

diszkont-tényező

Ezt a jelenértéket ***diszkontált értéknek,*** az $\frac{1}{1+r}$ számot pedig ***diszkottényezőnek*** nevezzük.

Megemlítjük, hogy pénzügytan jegyzetekben a kamatos kamat számítást jövőérték számításnak (Future Value, FV), a diszkontálást pedig jelenérték számításnak (Present Value, PV) szokták nevezni.

5.1.3 Nominális, effektív és konform kamatláb, folytonos kamatozás

Már az Euler-féle szám bevezetésekor láttuk, hogy a féléves 50%-os kamatláb többet ér, mint az éves 100%-os. Valóban, ha az éves kamatláb *p%* és évente *m*-szer történik a tőkésítés (a kamatjóváírás) $\frac{p}{m}$ %-kal, akkor minden kamatjóváírást követően a felnövekedett tőke kamatozik tovább, vagyis a tényleges (effektív) kamatláb kiszámításához a kamatos kamat számítás képletét kell alkalmaznunk.

5.6 Tétel Legyen az éves ***nominális (kinyilvánított, jegyzett)*** kamatláb p_{nom}%. Ha évente m-szer történik a tőkésítés $\frac{p_{nom}}{m}$ %-kal, akkor az ***effektív*** (***tényleges***) p_{eff} % kamatlábat az alábbi összefüggésből kaphatjuk meg:

nominális kamatláb

effektív kamatláb

$$1+r_{eff}=\left(1+\frac{r_{nom}}{m}\right)^m,$$

ahol $r_{eff}=p_{eff}/100$, $r_{nom}=p_{nom}/100$.

Ekkor a $\frac{p_{nom}}{m}$ %-ot ***konform kamatlábnak*** nevezzük.

konform kamatláb

5.7 Példa Legyen az éves nominális kamatláb 24%. Ekkor a havi (m=12) konform kamatláb 2% és az

$$(1+0{,}02)^{12}\approx 1{,}2682$$

összefüggésből kapjuk, hogy az éves effektív kamatláb 26,82%.

Megjegyezzük, hogy az Excel-ben az effektív kamatlábat az EFFECT beépített függvénnyel számíthatjuk ki. Az 5.7 példában szereplő eredményt az =EFFECT(24%;12) utasítással kaphatjuk meg.

5.8 Példa Számítsuk ki a 24%-os effektív kamatlábnak megfelelő éves nominális kamatlábat, ha a tőkésítés negyedévente (m=4) történik!

Ekkor az

$$1+0{,}24=\left(1+\frac{r_{nom}}{4}\right)^4$$

összefüggésből kell kifejezni az $r_{nom}=p_{nom}/100$ értéket:

$$1+\frac{r_{nom}}{4}=\sqrt[4]{1+0{,}24},\qquad r_{nom}=4\cdot\left(\sqrt[4]{1+0{,}24}-1\right)\approx 0{,}221.$$

Tehát az éves nominális kamatláb 22,1%.

Az Excel-ben a nominális kamatlábat a NOMINAL beépített függvénnyel kaphatjuk meg, például az =NOMINAL(24%;4) utasítás a fenti 22,1% eredményt adja.

folytonos kamatozás

Tegyük fel, hogy az 5.6 tételben az évenkénti tőkésítési részidőszakok száma (m) tart a végtelenbe. Ekkor ***folytonos kamatozásról*** beszélünk és az éves effektív p_{eff} % kamatlábat az

$$1+r_{eff} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_{nom}}{m}\right)^m = e^{r_{nom}}$$

összefüggésből kapjuk meg, ahol $r_{eff} = p_{eff}/100$, $r_{nom} = p_{nom}/100$.

5.9 Példa Az éves nominális 24%-os kamatlábnak az

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}24}{m}\right)^m = e^{0{,}24} \approx 1{,}2712$$

összefüggés alapján évi 27,12%-os effektív kamatláb felel meg.

A folytonos kamatozás például az opciós értékelés vagy az árfolyam meghatározásakor fordul elő.

Megjegyezzük, hogy Excel-ben az e szám hatványait a KITEVŐ beépített függvénnyel számíthatjuk ki. Az 5.9 példában szereplő eredményt például az =KITEVŐ(0,24) utasítás adja.

5.1.4 Az infláció figyelembevétele

Vizsgáljuk meg a következő esetet.

5.10 Példa Legyen a havi bérünk 100 000 Ft és egy kilogramm hús ára 1000 Ft. Ekkor fizetésünkből 100 kg húst vásárolhatunk (a reálbérünk 100 egység). Tegyük fel, hogy a fizetésünket megemelték 21%-kal, 121 000 Ft-ra és az infláció (az árszínvonal növekedése) 10%. Ekkor egy kg hús 1100 Ft-ba kerül, és a megemelt fizetésünkből 121 000:1100 = 110 kg húst tudunk (csak) vásárolni.

Mivel 110:100=1,1, ezért a változások eredményeképpen fizetésünk vásárló-értéke (a reálbér) 0,1-del, azaz 10%-kal lett nagyobb. Hibát követ el az, aki a 21% és a 10% különbségével számolva 21%–10%=11%-os növekedésről beszél!!! Az eltérés jelentősnek mondható – 1 százalékpont – ami a (tíz százalékos) növekedésnek a 10%-a.

Általános esetben a következőt kapjuk.

Tegyük fel, hogy éves p_{no}%-os nominális kamatláb és éves p_{in}%-os infláció (árszínvonal-emelkedés) esetén tőkénk vásárlóértéke m év alatt p_{re}%-kal növekszik. Ekkor

$$1+r_{re}=\left(\frac{1+r_{no}}{1+r_{in}}\right)^m,$$

ahol $r_{re}=p_{re}/100$, $r_{no}=p_{no}/100$ és $r_{in}=p_{in}/100$.

az infláció figyelembe-vétele

a vásárló-érték növekedése

5.11 Példa Mennyire növekszik fel tőkénk vásárló értéke öt év alatt 14%-os kamatláb és 8%-os infláció esetén?

Megoldás: körülbelül 31%-kal, ugyanis

$$\left(\frac{1+0{,}14}{1+0{,}08}\right)^5\approx 1+0{,}31.$$

Meg kell jegyeznünk, hogy úgy a mindennapi életben, mint a közgazdasági-pénzügyi gyakorlatban – sőt gyakran a szakirodalomban is – az 5.11 példában közölt helyes válasz helyett tévesen azt mondják, hogy a nominális 14%-os béremelés 8%-os infláció mellett 6%-os reálbér-növekedést eredményez. E téves felfogás szerint öt év alatt fizetésünk reálértékben – az $1{,}06^5\approx 1+0{,}34$ összefüggés alapján – 34%-kal emelkedne. Itt is látszik, akárcsak a bevezető 5.10 példában, hogy e hibás gondolatmenet által kapott növekedésnek (34%) a tényleges növekedéstől (31%) való eltérése elég jelentős – közel 10%-os (három százalékpontos).

5.2 Járadékszámítás

Az egyenlő időközönként fizetett összegek sorozatát ***járadéknak*** nevezik. A járadék fizetés történhet egy bizonyos pénzösszeg gyűjtése céljából – ***gyűjtőjáradék***, vagy egy felvett kölcsön törlesztése céljából – ***törlesztőjáradék***. Az előző fejezetben láttuk, hogy a különböző pénzösszegek összehasonlításakor a fizetendő összeg mellett a teljesítés időpontját és a kamatlábat is figyelembe kell venni. A több évre végzett elemzések különböző összegekre más-más kamatláb mellett eléggé bonyolult számításokkal járnak. Ezért járadékszámításnál két egyszerűsítő feltételezést szoktak alkalmazni:

1. a fizetési időközök megegyeznek a kamatidővel,
2. minden alkalommal ugyanakkora összeget fizetünk.

5.2.1 Gyűjtőjáradék

Tegyük fel, hogy n éven át minden év elején befizetünk a takarékba a összeget p%-os éves kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz az n-edik év végén?

Itt is a kamatos kamat számítás képletét alkalmazzuk. Az n-edik év elején befizetett a összeg egy éven át kamatozik, így év végére

$$a \cdot (1+r) = a \cdot q$$

összegre gyarapodik fel, ahol $r = p/100$ és $q = 1+r$. Az $(n-1)$-edik év elején befizetett a összeg két éven át kamatozik, és az n-edik év végére ez

$$a \cdot (1+r)^2 = a \cdot q^2$$

összegre növekszik fel. Folytatva a gondolatmenetet kapjuk, hogy az első befizetés esetén n-szer történik a tőkésítés, így az n-edik év végére az első év elején befizetett a összeg

$$a \cdot (1+r)^n = a \cdot q^n$$

összegre gyarapodik fel. Összeadva a kapott értékeket, kapjuk, hogy az n-edik év végére

$$S_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n$$

összeg áll rendelkezésünkre. A 4.33 tétel alapján

$$S_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = a \cdot q \cdot \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ezzel igazoltuk a következő állítást.

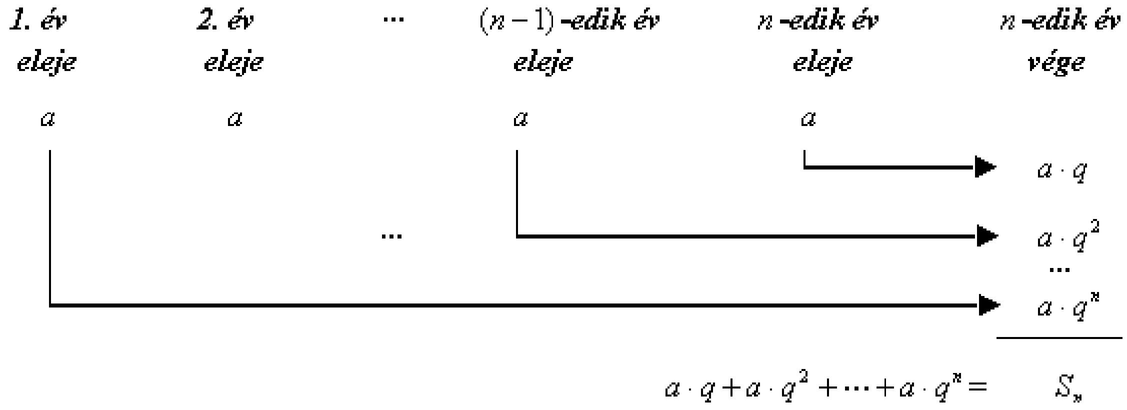
gyűjtőjáradék

5.12 Tétel Ha n éven át minden év elején befizetünk a összeget p%-os éves kamatláb mellett, akkor az n-edik év végén

$$S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

összeg áll rendelkezésünkre, ahol $q = 1 + r$ és $r = p/100$.

A fenti számítások szemléltetésére készítettük az alábbi ábrát, amely talán segít jobban megérteni az elmondottakat.



5.2 ábra

5.2.2 Törlesztőjáradék

Tegyük fel, hogy felvettünk egy K_n összegű kölcsönt *p*%-os éves kamatláb mellett, amelyet *n* éven keresztül kell törlesztenünk egy év múlva kezdődően minden év elején azonos *a* összegekben (törlesztő részletekben). Mekkora a törlesztő részlet? A válaszhoz megvizsgáljuk, hogy milyen összefüggés van a fenti adatok között.

A legegyszerűbb úgy eljárni, hogy a törlesztő részleteket diszkontáljuk a kölcsön felvételének időpontjára (jelen idő). Az egy év múlva esedékes *a* összeg most

$$a \cdot \frac{1}{1+r} = a \cdot q$$

összeget ér, ahol $r = p/100$ és $q = \frac{1}{1+r}$. Hasonlóan kapjuk, hogy a két év múlva esedékes *a* összeg jelenértéke

$$a \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 = a \cdot q^2,$$

és így tovább, az *n* év múlva esedékes *a* összeg jelenértéke

$$a \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n = a \cdot q^n.$$

Így a felvett K_n kölcsön egyenlő

$$K_n = a \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right) + a \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \cdots + a \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n = a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n \qquad .$$

Az előző ponthoz hasonlóan alkalmazzuk a 4.33 tételt

$$K_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = a \cdot q \cdot \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) =$$

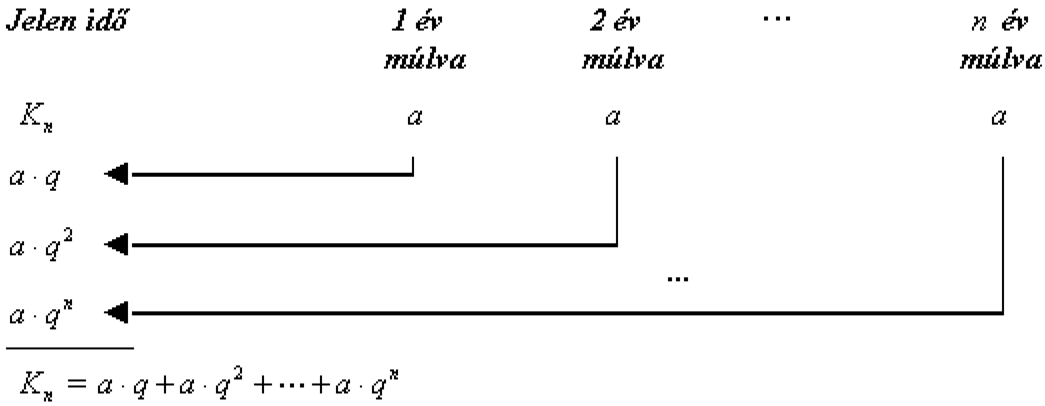
$$= a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Itt az utolsó egyenlőséget úgy kaptuk meg, hogy az előző kifejezésben szereplő tört számlálóját és nevezőjét beszoroztuk –1-gyel, ugyanis ezek – a $q = \frac{1}{1+r} < 1$ összefüggés miatt – negatívak.

törlesztő-járadék

> **5.13 Tétel** Tegyük fel, hogy K_n összegű kölcsönt vettünk fel *p*%-os éves kamatláb mellett, amelyet *n* éven keresztül törlesztünk egy év múlva kezdődően minden év elején azonos *a* összegekben. Ekkor
>
> $$K_n = a \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$
>
> ahol $q = \frac{1}{1+r}$ és $r = p/100$.

A végzett számításokat megint ábrával szemléltetjük.



5.3 ábra

Megjegyezzük, hogy pénzügytanban az adott számú éven keresztül esedékes állandó tagú járadékot ***annuitásnak (évjáradéknak)*** nevezik. Törlesztőjáradék esetén az 1 pénzegységű *n* éves annuitás jelenértékét – ami egyenlő $q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}$ – ***annuitási tényezőnek*** nevezik. Mivel az annuitási tényező értékeinek kiszámítása viszonylag bonyolult, azokat – a futamidő és a kamatláb függvényében – táblázatban szokták megadni. Íme a táblázat egy részlete:

Annuitás-táblázat:
egy év múlva kezdődő *n* éven keresztül esedékes évi 1$ jelenértéke

Éves kamatláb

Évek	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	7,0%
1	0,9901	0,9852	0,9804	0,9756	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346
2	1,9704	1,9559	1,9416	1,9274	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080
3	2,9410	2,9122	2,8839	2,8560	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243
4	3,9020	3,8544	3,8077	3,7620	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872
5	4,8534	4,7826	4,7135	4,6458	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002

					Éves kamatláb				
Évek	**1,0%**	**1,5%**	**2,0%**	**2,5%**	**3,0%**	**4,0%**	**5,0%**	**6,0%**	**7,0%**
6	5,7955	5,6972	5,6014	5,5081	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665
7	6,7282	6,5982	6,4720	6,3494	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893
8	7,6517	7,4859	7,3255	7,1701	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713
9	8,5660	8,3605	8,1622	7,9709	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152
10	9,4713	9,2222	8,9826	8,7521	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236
11	10,3676	10,0711	9,7868	9,5142	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987
12	11,2551	10,9075	10,5753	10,2578	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427
13	12,1337	11,7315	11,3484	10,9832	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577
14	13,0037	12,5434	12,1062	11,6909	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455
15	13,8651	13,3432	12,8493	12,3814	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079
16	14,7179	14,1313	13,5777	13,0550	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466
17	15,5623	14,9076	14,2919	13,7122	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632
18	16,3983	15,6726	14,9920	14,3534	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591
19	17,2260	16,4262	15,6785	14,9789	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356
20	18,0456	17,1686	16,3514	15,5892	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940
21	18,8570	17,9001	17,0112	16,1845	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355
22	19,6604	18,6208	17,6580	16,7654	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612
23	20,4558	19,3309	18,2922	17,3321	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722
24	21,2434	**20,0304**	18,9139	17,8850	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693
25	22,0232	20,7196	19,5235	18,4244	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536

5.14 Példa Mennyi a havi törlesztő részlete 100 000 Ft kölcsönnek, ha a futamidő két év és az éves kamatláb 18%?

Ekkor a havi kamatláb 1,5% (ami – ahogy láttuk ezt az 5.1.3 fejezetben – ténylegesen több, mint az éves 18%) és kamatidőszakok száma 24. Adataink és az ismeretlen *a* törlesztő részlet között az 5.13 tétel alapján az alábbi összefüggés áll fenn:

$$100\,000 = a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots + a\cdot q^{24} = a\cdot q\cdot\frac{1-q^{24}}{1-q},$$

ahol $q=\dfrac{1}{1+0{,}015}$. Számítsuk ki az annuitási tényező értékét a képlet szerint:

$$q\cdot\frac{1-q^{24}}{1-q} = 0{,}9852\cdot\frac{1-0{,}9852^{24}}{1-0{,}9852} = 0{,}9852\cdot\frac{1-0{,}699544}{0{,}0148} = 20{,}0304.$$

Amint látjuk, ez a szám megegyezik a táblázat második (1,5%-kal jelölt) oszlopának a 24 (Évek) sorában szereplő értékkel – azért a 24-gyel jelölt sorban keressük, mert két év alatt havi törlesztés esetén összesen 24 részletfizetés történik. Tehát

$$100\,000 = a\cdot 20{,}0304$$

és a havi törlesztő részlet

$$a=\frac{100\,000}{20{,}0304} = 4992{,}41\ \text{(Ft)}.$$

Megjegyezzük, hogy így összesen $24 \cdot 4992{,}41 = 119\,817{,}84$ Ft-ot kell visszafizetnünk.

Elemezzük a havi törlesztő részletek nagyságát alaposabban, kiszámítva azt 3 évtől 9 évig terjedő törlesztések esetén (a havi kamatláb változatlanul 1,5%).

A példában leírtaknak megfelelően három éves (36 hónapos) futamidő esetén a havi törlesztő részlet

$$a = \frac{100\,000}{27{,}6607} = 3615{,}24 \text{ (Ft)}$$

és így a visszafizetendő összeg $36 \cdot 3615{,}24 = 130\,148{,}62$ (Ft). Hasonlóan végezzük el számításainkat más futamidőkre. A kapott eredményeket foglaljuk táblázatba.

Hónapok száma	36	48	60	72	84	96	108
Havi törlesztő részlet	3615,24	2937,50	2539,34	2280,78	2101,78	1972,32	1875,69
Visszafizetendő összeg	130148,62	141000,0	152360,56	164216,1	176549,84	189342,86	202574,39

A számítások megkönnyítésére használhatjuk az Excel RÉSZLET beépített függvényét, például a – 100 000 Ft havi 1,5% kamatláb melletti 36 hónapra esedékes – 3615,24 Ft havi törlesztő részletet könnyen megkapjuk az

=RÉSZLET(1,5%;36;-100 000)

utasítással.

Látszik, hogy a havi törlesztő részlet nem lineárisan csökken – annál lassabban, minél hosszabb a futamidő. A számok önmagukért beszélnek. Három év alatt a felvett kölcsön mindössze egyharmadával több összeget fizetünk vissza, míg kilenc év alatt kölcsön összegének több mint dupláját kell visszafizetnünk, mindeközben a havi törlesztő részlet csak a felére csökken. Megemlítjük még, hogy a tíz éves futamidőre esedékes havi 1 801,85 Ft törlesztő részlet a futamidő megduplázásakor (húsz év esetén) mindössze 1 543,31 Ft-ra csökken. A húsz év alatt viszont összesen 370 394 Ft-ot fogunk visszafizetni.

Folytatva a gondolatmenetet kapjuk, hogy 100 000 Ft havi törlesztő részlete 1,5% havi kamatláb mellett harminc évre 1509,09 Ft, negyven évre 1501,18 Ft és ötven évre 1500,20 Ft. Így eljutunk az ***örökjáradék*** fogalmához. A példánkból látszik, hogy elhelyezve a takarékba 100 000 Ft-ot havi 1,5% kamatláb mellett minden hónap végén felvehetjük a havi 1500 Ft kamatot és a pénzünk soha nem fog elfogyni.

5.15 Feladat Mekkora összeget kell elhelyeznünk a takarékba ahhoz, hogy havi p%-os kamatláb mellett minden hónap végén K összeget vehessünk fel? Más szavakkal: határozzuk meg a K összegű örökjáradék jelenértékét, ha a kamatláb p%!

5.16 Feladat Határozzuk meg a K kezdőösszegű növekvő örökjáradék – a periódusonként egyenlő ütemben növekvő pénzáramok sorozatának – jelenértékét, ha a kamatláb p% és a periódusonkénti növekedés üteme q%!

5.17 Feladat Határozzuk meg a K kezdőösszegű csökkenő örökjáradék – a periódusonként egyenlő ütemben csökkenő pénzáramok sorozatának – jelenértékét, ha a kamatláb p% és a periódusonkénti csökkenés üteme q%!

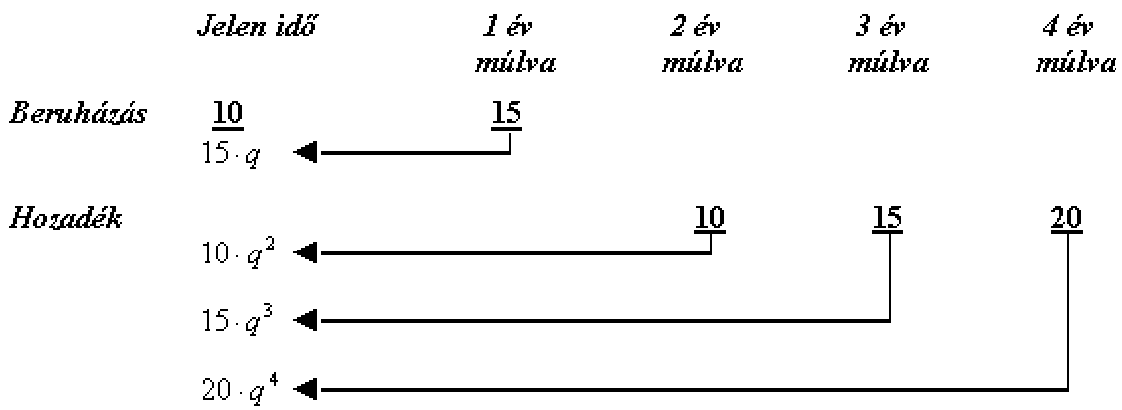
A járadékszámítással kapcsolatosan megemlítjük még az Excelbe beépített RÁTA, JBÉ, MÉ, PRÉSZLET, RRÉSZLET és a PER.SZÁM függvényeket, amelyeknek részletes leírása megtalálható az Excel súgójában.

5.3 Beruházás gazdaságossági számítások, beruházási döntések

Pénzügytanban a tárgyi eszközök beszerzésére, létesítésére fordított tőkekiadásokat beruházásnak nevezik. A beruházás gazdaságosságának eldöntésekor felmerül a kérdés, hogy a tervezett hozamok fedezik-e a ráfordítást. Mint már többször említettük, pénzügyi számításoknál a felmerülő pénzösszegek nagysága mellett az esedékesség időpontjának is fontos szerepe van. Ezért a különböző időpontokban felmerülő pénzösszeget egy rögzített időpontban kell összehasonlítani. A legpraktikusabb úgy eljárni, hogy a beruházás során esedékes pénzösszegeket diszkontáljuk a beruházás kezdetének időpontjára (jelen idő).

5.18 Példa Tegyük fel, hogy beruházásunk finanszírozása két ütemben történik: most azonnal kell fizetnünk 10 mFt-ot, majd egy év múlva 15 mFt-ot. Terveink szerint a beruházás két év múlva 10 mFt, három év múlva 15 mFt és négy év múlva 20 mFt hozadékot eredményez. Gazdaságos-e a beruházás, ha az éves kamatláb 20%?

Járjunk el a fentebb leírtak szerint.



5.4 ábra

Végezzük el a számításokat! Példánkban a kamatláb 20%, így a diszkonttényező

$$q = \frac{1}{1+0,20} = \frac{5}{6} = 0,8333333.$$

Tehát a beruházás kiadások diszkontált összege

$$B_0 = 10 + 15 \cdot q = 10 + 12,5 = 22,5 \text{ (mFt)}$$

és a hozadékok diszkontált összege

$$H_0 = 10 \cdot q^2 + 15 \cdot q^3 + 20 \cdot q^4 \approx 6,9444 + 8,6806 + 9,6451 \approx 25,27 \text{ (mFt)}$$

A beruházás nyilvánvalóan gazdaságos, hiszen a $B_0 = 22{,}5$ mFt-os befektetés $H_0 = 25{,}27$ mFt hozadékot eredményez.

nettó jelenérték-mutató

A beruházások B_0 diszkontált összegének és a hozamok H_0 diszkontált összegének $H_0 - B_0$ különbségét ***nettó jelenérték-mutatónak (Net Present Value – NPV)*** nevezzük:

$$NPV = H_0 - B_0 .$$

NPV-szabály

A beruházás akkor gazdaságos, ha a nettó jelenérték-mutatója pozitív. Egymást kizáró beruházások közül az a leggazdaságosabb, amelynek nettó jelenérték-mutatója a legnagyobb.

Példánkban a nettó jelenérték-mutató

$$NPV = H_0 - B_0 = 25{,}27 - 22{,}5 = 2{,}77 \quad \text{(mFt)}.$$

Excel-ben a nettó jelenérték-mutatót az NMÉ beépített függvény segítségével számíthatjuk ki. Azonban van egy „kis probléma”. Az NMÉ olyan feltételezéssel számol, hogy a beruházás megvalósítása egy év múlva kezdődik, vagyis a jelen idő egy évvel korábbra tolódik. A példánknál maradva az =NMÉ(20%;–10;–15;10;15;20) utasítás a 2,308385 mFt eredményt adja. Az egy évvel korábbi 2,308385 mFt-ból nyilván kamatszámítással kapjuk meg a jelenlegi időpontban esedékes nettó jelenérték-mutatót:

$$NPV = 2{,}308385 \cdot 1{,}20 \approx 2{,}77 \quad \text{(mFt)}.$$

A nettó jelenérték-mutató pontosabb kiszámítására használhatjuk az Excel XNPV beépített függvényét.

Az NPV-szabály szerint két beruházás közül az a gazdaságosabb, amelynek nagyobb a nettó jelenérték-mutatója. De melyik beruházást válasszuk akkor, ha a nettó jelenérték-mutatójuk megegyezik? Tegyük fel például, hogy a 2,77 mFt nettó jelenérték-mutatót a már említett 22,5 mFt ráfordítást igénylő beruházás mellett egy 20 mFt ráfordítást igénylő beruházással is el tudjuk érni? Sejthető, hogy a második beruházás a gazdaságosabb. Valóban, ennek igazolására alkalmazható a következő mutató.

megtérülési ráta

A beruházások B_0 diszkontált összegének és a hozamok H_0 diszkontált összegének $\dfrac{H_0}{B_0}$ hányadosát ***megtérülési rátának (jövedelmezőségi index, Profitability Index – PI)*** nevezzük:

$$MR = \frac{H_0}{B_0} .$$

PI-szabály

A beruházás akkor gazdaságos, ha a megtérülési rátája 1-nél nagyobb.

Térjünk vissza az 5.19 példa elemzéséhez. A beruházás megtérülési rátája

$$MR = \frac{H_0}{B_0} = \frac{25{,}27}{22{,}5} \approx 1{,}123.$$

Ez azt jelenti, hogy a megtérülés kb. 12%-os. Változtassuk meg a kamatlábat 20%-ról 25%-ra. Ekkor a nettó jelenérték-mutató

$$NPV = H_0 - B_0 = 22{,}272 - 22 = 0{,}272 \quad \text{(mFt)}.$$

Sőt, 26% kamatláb esetén a nettó jelenérték-mutató már negatív:

$$NPV = H_0 - B_0 = 21{,}73 - 21{,}90 = -0{,}17 \quad \text{(mFt)}.$$

Látszik, hogy van olyan kamatláb, példánkban ez kb. 25,6%, amelynél a nettó jelenérték-mutató egyenlő nullával.

Azt a kamatlábat, amelynél a beruházások B_0 diszkontált összege és a hozamok H_0 diszkontált összege megegyezik egymással (a nettó jelenérték mutató nulla), ***belső megtérülési rátának (Internal Rate of Return – IRR)*** nevezzük:	***belső megtérülési ráta***
A beruházás általában akkor gazdaságos, ha a belső megtérülési rátája nagyobb, mint a *p%* kalkulatív kamatláb. Két beruházás közül általában az a gazdaságosabb, amelynek nagyobb a belső megtérülési rátája.	***IRR-szabály***

Az IRR-szabály alkalmazása – eltérően az NPV- és a PI-szabálytól – akkor is lehetséges, ha nem ismert a diszkontáláshoz szükséges kamatláb (a beruházástól elvárt hozam).

Felhívjuk azonban az olvasó figyelmét a belső megtérülési ráta kiszámításának nehézségeire és a szabály alkalmazásának veszélyeire. A belső megtérülési ráta kiszámítása bonyolult, sőt egy beruházásnak több belső megtérülési rátája is lehetséges. Egy *n* évig tartó beruházás esetén a B_0 beruházások és a H_0 hozamok diszkontált összegében szereplő ismeretlen *p*% kamatláb meghatározásához egy $H_0 = B_0$ *n*-edfokú egyenlethez jutunk, amelynek általános esetben *n* különböző megoldása lehet (!!!). Tovább bonyolítja a helyzetet az a bizonyított tény, hogy az *n*-edfokú egyenletre $n \geq 5$ esetén nem is létezik megoldó-képlet.

A belső megtérülési ráta kiszámításához legegyszerűbb az Excel-t hívni segítségül, annak is a BMR beépített függvényét.

5.19 Példa Számítsuk ki az 5.19 példában szereplő beruházás belső megtérülési rátáját. A feltételezésünk szerint a beruházás finanszírozása két ütemben történik: most azonnal kell fizetnünk 10 mFt-ot, majd egy év múlva 15 mFt-ot. Terveink szerint a beruházás két év múlva 10 mFt, három év múlva 15 mFt és négy év múlva 20 mFt hozadékot eredményez.

A megoldáshoz az Excel-t alkalmazzuk. Helyezzük el a beruházás során felmerülő pénzáramokat (cash flow) egymás után például az A1:E1 cellákba úgy, hogy a ráfordítási összegeket negatív előjellel vesszük. Ekkor az =BMR(A1:E1) utasítás a 25,6076119544237% eredményt adja. Íme az Excel munkalap számításhoz szükséges részlete, ahol az A3 cellába az =BMR(A1:E1) utasítást gépeltük:

	A	B	C	D	E
1	-10	-15	10	15	20
2					
3	25,6076119544237%				

5.20 Feladat Igazoljuk, hogy az előző példában szereplő beruházásnak csak egy belső megtérülési rátája van!

5.21 Feladat Igazoljuk, hogy az egyszeri ráfordítást igénylő beruházásnak csak egy belső megtérülési rátája van!

Íme egy példa arra, hogy egy beruházásnak több belső megtérülési rátája is lehetséges.

5.22 Példa Tegyük fel, hogy beruházásunk finanszírozása két ütemben történik: most azonnal kell fizetnünk 2,5 mFt-ot majd két év múlva 19,25 mFt-ot. Terveink szerint a beruházás egy év múlva 12,125 mFt és három év múlva 10 mFt hozadékot eredményez. Számítsuk ki a beruházás belső megtérülési rátáját!

A diszkontáláshoz szükséges ismeretlen diszkonttényező legyen q. Ekkor a beruházások diszkontált összege

$$B_0 = 2{,}5 + 19{,}25 \cdot q^2$$

és a hozadékok diszkontált összege

$$H_0 = 12{,}125 \cdot q + 10 \cdot q^3$$

így a $H_0 = B_0$ összefüggésből a

$$10 \cdot q^3 - 19{,}25 \cdot q^2 + 12{,}125 \cdot q - 2{,}5 = 0$$

harmadfokú egyenlethez jutunk. Könnyen igazolható, hogy ennek az egyenletnek három gyöke van $q_1 = 0{,}8$, $q_2 = 0{,}625$ és $q_3 = 0{,}5$. Vagyis az ismeretlen kamatlábra három egyenlethez jutunk:

$$\frac{1}{1+r_1} = 0{,}8, \quad \frac{1}{1+r_2} = 0{,}625 \quad \text{és} \quad \frac{1}{1+r_3} = 0{,}5.$$

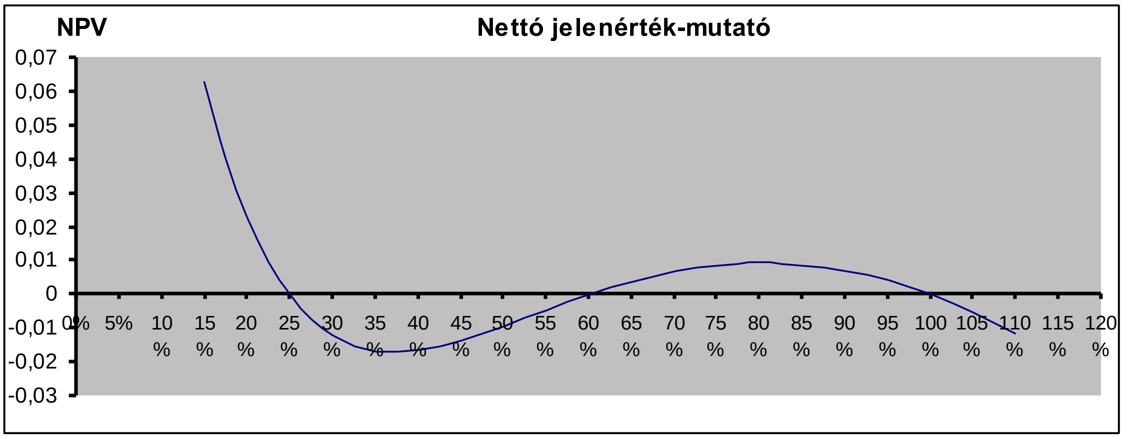
Innen kapjuk, hogy

$$r_1 = 0{,}25, \quad r_2 = 0{,}6 \quad \text{és} \quad r_3 = 1,$$

tehát beruházásunknak három belső megtérülési rátája van:

$$p_1 = 25\%, \quad p_2 = 60\% \quad \text{és} \quad p_3 = 100\%.$$

Az alábbi ábra a beruházás nettó jelenérték-mutatóját ábrázolja a kamatláb függvényében. Látszik, hogy a NPV 25% kamatláb alatt, valamint 60% és 100% kamatláb között pozitív, vagyis ilyen kamatlábak esetén gazdaságos a beruházás.



5.5 ábra

A beruházás gazdaságosságának eldöntéséhez három szabályt ismertettünk, foglaljuk most össze ezeket.

		Döntés	
		Elfogadni	**Elutasítani**
Nettó jelenérték-mutató	NPV-szabály	NPV>0	NPV<0
Megtérülési ráta (MR)	PI-szabály	MR>1	MR<1
Belső megtérülési ráta	IRR-szabály	IRR>*p*%	IRR<*p*%

Ellenőrző kérdések az 5. fejezethez

E.5.1 Miért ér többet egy forint ma, mint holnap?
E.5.2 Az egyszerű kamat fogalma és kiszámítása.
E.5.3 A kamatos kamat számítás képlete.
E.5.4 A diszkontálás fogalma.
E.5.5 A nominális, effektív és konform kamatláb fogalma.
E.5.6 Az effektív kamatláb kiszámítása.
E.5.7 A nominális kamatláb kiszámítása.
E.5.8 A folytonos kamatozás fogalma és gyakorlati alkalmazása.
E.5.9 A vásárlóérték növekedésének meghatározása (az infláció figyelembevétele).
E.5.10 A gyűjtőjáradék kiszámítása.
E.5.11 Törlesztőjáradék, a törlesztő részlet kiszámítása.
E.5.12 Az annuitás fogalma.
E.5.13 Az örökjáradék fogalma.
E.5.14 Beruházási döntési szabályok.
E.5.15 A nettó jelenérték-mutató fogalma.
E.5.16 A megtérülési ráta fogalma.
E.5.17 A belső megtérülési ráta fogalma.
E.5.18 Soroljunk fel néhányat az Excel pénzügyi függvényei közül.

Gyakorló feladatok az 5. fejezethez.

G.5.1 Kamatszámítás és diszkontálás

G.5.1.a) Elhelyeztünk a takarékban 400 000 Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz egy év múlva, ha az éves kamatláb 18% és

A) egyszerű kamatozással számolunk,

B) a tőkésítés negyedévente történik,

C) havi, folyamatos lekötést kértünk.

G.5.1.b) Mennyi pénzzel kell rendelkeznünk most ahhoz, hogy négy év múlva 500 000 Ft álljon rendelkezésünkre? Az éves kamatláb 20%.

G.5.1.c) Hány év alatt duplázódik meg a pénzünk éves 19%-os kamat mellett?

G.5.1.d) Egy árucikk vásárlására két árajánlatot kaptunk:

A) most fizessünk 400 000 Ft-ot;

B) most fizessünk 100 000 Ft előleget, majd három év múlva 350 000 Ft-ot.

Melyik a kedvezőbb árajánlat, ha az éves kamatláb:

a) 4%;

b) 7%;

c) 10%?

G.5.1.e) Egy árucikk vásárlására két árajánlatot kaptunk:

A) most fizessünk 500 000 Ft-ot;

B) most fizessünk 150 000 Ft előleget, majd négy év múlva 450 000 Ft-ot.

Melyik a kedvezőbb árajánlat, ha az éves kamatláb:

a) 5%;

b) 8%;

c) 6,484%?

G.5.1.f) Állítsuk növekedő sorrendbe az alábbi pénzösszegeket, ha az éves kamatláb 13%:

A) a most esedékes 200 000 Ft;

B) az egy év múlva esedékes 225 000 Ft;

C) a két év múlva esedékes 260 000 Ft;

D) a három év múlva esedékes 290 000 Ft.

G.5.1.g) Állítsuk növekedő sorrendbe az alábbi pénzösszegeket, ha az éves kamatláb 15%:

A) a most esedékes 300 000 Ft;

B) az egy év múlva esedékes 350 000 Ft;

C) a két év múlva esedékes 390 000 Ft;

D) a három év múlva esedékes 450 000 Ft.

G.5.2 Nominális, effektív és konform kamatláb

G.5.2.a) Számítsuk ki a negyedévi 3%-os konform kamatlábnak megfelelő éves effektív kamatlábat!

G.5.2.b) Melyik a nagyobb kamatláb: a havi 3% vagy az éves 40%? Válaszunkat indokoljuk!

G.5.2.c) Elhelyeztünk a takarékban 400 000 Ft-ot éves 18%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz a negyedik év végén, ha

A) a tőkésítés évente történik?

B) havi lekötéssel helyeztük el pénzünket?

C) heti lekötést feltételezünk?

D) folytonos kamatozással számolunk?

G.5.2.d) Elhelyeztünk a takarékban 500 000 Ft-ot éves 12%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz az ötödik év végén, ha

A) a tőkésítés évente történik?

B) havi lekötéssel helyeztük el pénzünket?

C) heti lekötést feltételezünk?

D) folytonos kamatozással számolunk?

G.5.2.e) Kölcsönt vettünk fel éves 30%-os kamatra, de a törlesztés havi rendszerességgel történik. Mekkora az éves effektív kamatláb?

G.5.2.f) Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi kamatlábakat:

A) havi 3%;

B) negyedévi 9,5%;

C) félévi 20%;

D) éves 41%.

G.5.2.g) Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi kamatlábakat:

A) havi 5%;

B) negyedévi 16%;

C) félévi 33%;

D) éves 80%.

G.5.3 Az infláció figyelembe vétele

G.5.3.a) Tegyük fel, hogy a nyugdíjasok 15%-os nyugdíjemelést kaptak és az infláció 7%. Mekkora a nyugdíjak vásárlóértékének a növekedése?

G.5.3.b) Tegyük fel, hogy a közalkalmazottak 2005-ben 13%-os, 2006-ban 10%-os és 2007-ben 16%-os béremelést kaptak. Az infláció mértéke ezekben az években megfelelően: 7%, 5% és 8% volt. Számítsuk ki a reálbér-növekedést minden évben külön-külön, és a három év alatt összesen!

G.5.3.c) Tegyük fel, hogy jövőre 6%-os infláció várható és a vasutas dolgozók 5%-os reálbér-növekedést kérnek. Mekkora nominális béremelés szükséges ehhez?

G.5.3.d) 44%-os nominális béremelés 20%-os reálbér-növekedést eredményez. Mekkora az infláció?

G.5.3.e) Elhelyeztük a takarékba a pénzünket havi lekötéssel éves 18% kamat mellett két évre. Mekkorára nőtt pénzünk vásárlóértéke a két év alatt, ha az infláció az első évben 9% és a második évben 8% volt?

G.5.4 Gyűjtőjáradék és törlesztőjáradék

Megjegyzés: Az alábbi feladatok gyorsabb és könnyebb megoldásához használhatjuk az Excel táblázatkezelőt, esetleg annak beépített pénzügyi függvényeit.

G.5.4.a) Egy éven át minden hónap elején elhelyezünk a takarékba 20 000 Ft-ot. Mekkora pénzösszeg áll a rendelkezésünkre az év végén, ha az éves kamatláb 12%? Konform havi kamatlábbal számoljunk!

G.5.4.b) Mekkora az a 24%-s éves kamatra felvett kölcsön összege, amit egy éven át kell törlesztenünk havi 15 000 Ft-os részletekben? Konform havi kamatlábbal számoljunk!

G.5.4.c) Számítsuk ki 500 000 Ft három éves futamidejű kölcsön havi törlesztő-részletét, ha az éves kamatláb 18%!

G.5.4.d) 100 000 Ft egy éves kölcsön havi törlesztő részlete 9 168 Ft. Mennyi a havi kamatláb?

G.5.4.e) 2002. január elején először, aztán minden év elején elhelyezünk a takarékba 200 000 Ft-ot, utoljára 2006-ban. 2007. január elején egy személygépkocsit vásároltunk. Ehhez az összegyűjtött pénzünkhöz akkora kölcsönt vettünk fel, melyet 24 havi egyenlő 35 000 Ft-os részletekben törlesztettünk vissza. Mennyibe került a vásárolt személygépkocsi, ha a kamatláb az első három évben 13 %, majd két évig 8% és a törlesztés idején havi 2%?

G.5.5 Beruházás gazdaságossági számítások

G.5.5.a) Egy most induló 20 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 25 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 20 mFt, három év múlva 25 mFt és négy múlva

30 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 18%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját!

G.5.5.b) Egy most induló 20 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 25 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 15 mFt, három év múlva 20 mFt és négy múlva 25 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 13%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját!

G.5.5.c) Egy most induló 15 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 20 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 5 mFt, három év múlva 9 mFt és négy múlva 18 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 10%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját! Adjunk becslést a beruházás belső megtérülési rátájára!

G.5.5.d) Egy most induló 15 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 20 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 10 mFt, három év múlva 15 mFt és négy múlva 20 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 10%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját! Adjunk becslést a beruházás belső megtérülési rátájára!

G.5.5.e) Egy most induló 17 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 20 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 12 mFt, három év múlva 17 mFt és négy múlva 22 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 15%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját!

G.5.5.f) Egy most induló 21 mFt-os beruházás egy év múlva újabb 24 mFt-t igényel. Ez a beruházás két év múlva 15 mFt, három év múlva 20 mFt és négy múlva 25 mFt hozadékot eredményez. A kamatláb 14%. Gazdaságos-e a beruházás? Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját!

G.5.5.g) Egy 8 mFt beruházás megtérülési rátája 1,2. Számítsuk ki a nettó jelenérték-mutatóját!

G.5.5.h) Egy 8 mFt beruházás nettó jelenérték-mutatója 2 mFt. Számítsuk ki a megtérülési rátáját!

G.5.6 Az év elején elhelyeztünk a takarékba 150 000 Ft-ot 12%-os kamatláb mellett.

a) Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén?

b) Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén, ha a tőkésítés havonta történik (a 12%-nak megfelelő azonos kamatlábbal)?

c) Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén folytonos kamatozást feltételezve?

G.5.7 Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi kamatlábakat!

A) havi 3%; B) éves 40%; C) negyedévi 13%

G.5.8 Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi pénzösszegeket, ha az éves kamatláb 7%!

A) a most esedékes 110 eFt;

B) egy év múlva esedékes 118 eFt;

C) két év múlva esedékes 125 eFt.

G.5.9 2001. január elején először, aztán minden év elején elhelyezünk a takarékba 35 000 Ft-ot, utoljára 2006-ban. 2007. január elején szeretnénk egy házi mozi rendszert vásárolni. Ehhez az összegyűjtött pénzünkhöz akkora kölcsönt veszünk fel, melyet minden év elején egyenlő 40 000 Ft-os részletekben törlesztünk vissza öt éven keresztül, először 2008-ban. Mennyibe került a vásárolt készülék, ha a kamatláb az első három évben 13 %, majd három évig 8% és a törlesztés idején 25%?

G.5.10 2002. január elején elhelyeztük pénzünket éves 16% kamatláb mellett. Mekkorára növekszik pénzünk vásárlóértéke 2008. végére, ha az infláció az első négy évben átlagosan 8%, majd a további években 4%?

G.5.11 Beruháztunk négy éven át, minden év elején 8 mFt-ot. A harmadik évtől kezdődően két éven át 5 mFt, majd a következő négy évben 15 mFt hozadékkal számolhatunk. Gazdaságos-e a beruházás, ha a kamatláb végig 10%. Számítsuk ki a beruházás nettó jelenérték-mutatóját és megtérülési rátáját!

G.5.12 Számítsuk ki azokat a (havi és éves) kamatlábakat, amelyeket az alábbi adatok jellemeznek:

Kölcsönösszeg	12 hónap	24 hónap	36 hónap	48 hónap	60 hónap	72 hónap
300 000 Ft	27 762 Ft	14 719 Ft	10 386 Ft	8 230 Ft	6 945 Ft	6 095 Ft
500 000 Ft	46 270 Ft	24 532 Ft	17 310 Ft	13 717 Ft	11 575 Ft	10 159 Ft
1 000 000 Ft	92 540 Ft	49 064 Ft	34 620 Ft	27 433 Ft	23 150 Ft	20 317 Ft

Kölcsönösszeg	Havi törlesztőrészlet	Futamidő
300 000 Ft	7 053 Ft/hó	60 hónap
500 000 Ft	11 755 Ft/hó	60 hónap
1 000 000 Ft	23 508 Ft/hó	60 hónap
3 000 000 Ft	67 435 Ft/hó	60 hónap
5 000 000 Ft	112 392 Ft/hó	60 hónap

6. Függvények határértéke, folytonos függvények

Mint korábban említettük, a határérték a matematikai analízis kulcsfontosságú fogalma, és ugyancsak nagyon fontos a matematika közgazdasági problémáknál való alkalmazásaiban. A 4. fejezetben a számsorozat határértékének a fogalmát tárgyaltuk. A számsorozat a természetes számok halmazán értelmezett függvény. Ebben a fejezetben megismerkedünk az egyváltozós valós függvény határértékének és a vele szorosan kapcsolatos folytonosságnak a fogalmával. Határérték nélkül a valós számrendszer meglehetősen hiányos lenne, lényegében csak a racionális számok halmazára korlátozódna. Az irracionális számok, mint például a $\sqrt{2}$, csak végtelen tizedes tört alakban írhatóak fel. Tulajdonképpen az irracionális számok a racionális számok sorozatainak határértékei.

6.1 Definíció Az $a \in \mathbf{R}$ ***torlódási pontja*** a $D \subseteq \mathbf{R}$ halmaznak, ha a minden környezetében van D-nek a-tól különböző eleme.

torlódási pont

6.2 Definíció Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvénynek az a pontban – ahol a torlódási pontja D-nek – létezik ***határértéke***, ha minden olyan $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\left(x_n \in D,\ x_n \neq a\right)$, a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Ekkor az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatok mindegyike egy és ugyanahhoz az A számhoz konvergál, amit az *f* ***függvény*** *a* ***pontbeli határértékének*** nevezünk. Jele: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{a} f(x) = A$.

függvény (pontbeli) határértéke

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Más szavakkal, a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ azt jelenti, hogy a-hoz elegendően közeli, de a-tól különböző x értékek választásával elérhető, hogy a megfelelő *f(x)* helyettesítési érték A-hoz tetszőlegesen közeli legyen.

6.3 Példa Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\lim_{x\to 2}(5x-2), \quad \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{x-2} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}.$$

Először is próbáljunk meg úgy eljárni, hogy kiszámítjuk a megfelelő függvényértékeket x-nek 2-höz közeli értékeire. Az eredményeket foglaljuk táblázatba. Számításainkhoz hívjuk segítségül az Excelt. A táblázat első sorában szereplő számokat írjuk be például egy munkalap A1:M1 celláiba, majd következő három sorba az egyes függvényértékek kiszámításához szükséges képleteket gépeljük. Például a C3 cellába az

=(3*A1^2-7*A1+2)/(A1-2)

utasítást gépelve kapjuk a táblázat harmadik sorában szereplő 3,5 értéket.

x	1,5	1,8	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1	2,2	2,5

$5x-2$	5,5	7	7,5	7,95	7,995	7,9995	8	8,0005	8,005	8,05	8,5	9	10,5
$\dfrac{3x^2-7x+2}{x-2}$	3,5	4,4	4,7	4,97	4,997	4,9997	####	5,0003	5,003	5,03	5,3	5,6	6,5
$\dfrac{1}{x-2}$	-2	-5	-10	-100	-1000	-10000	####	10000	1000	100	10	5	2

A táblázat második sorában szereplő értékekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az első határérték egyenlő 8-cal. Valóban, bármilyen 2-höz konvergáló $\langle x_n \rangle$ $(x_n \neq 2)$ sorozatot is veszünk, a megfelelő $\langle f(x_n) = 5x_n - 2 \rangle$ sorozat határértéke a 4.18 és 4.19 tételek alapján egyenlő lesz 8-cal. Nézzük a második határértéket, vagyis a táblázat harmadik sorát. Az itt szereplő #### azt jelenti, hogy ennek a cellának az értéke nem értelmezhető (ún. ZÉRÓOSZTÓ). Ennek ellenére van egy olyan sejtésünk, hogy a második határérték egyenlő 5-tel. Ez valóban így is van. Legyen $\langle x_n \rangle$ tetszőleges konvergáló olyan számsorozat, amelynek tagjai nem egyenlők 2-vel:

$$\langle x_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 2 \quad \text{és} \quad x_n \neq 2 .$$

Ekkor a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n^{\;2} - 7x_n + 2}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 2)(3x_n - 1)}{x_n - 2}$$

Ez a határérték ún. $\dfrac{0}{0}$ típusú, de mivel az $\langle x_n \rangle$ sorozat tagjai a választás szerint nem egyenlők 2-vel, így az $(x_n - 2)$ kifejezésre lehet egyszerűsíteni. Következésképpen a 4.18 és 4.19 tételek alapján

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 2)(3x_n - 1)}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty}(3x_n - 1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 .$$

Most vizsgáljuk meg a harmadik határértéket. A táblázatból is látszik, hogy ha jobbról közelítünk a 2-hoz, akkor a függvényértékek egyre nagyobbak lesznek és tartanak a plusz végtelenbe, míg ha balról közelítünk a 2-höz, akkor a függvényértékek tartanak a mínusz végtelenbe. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a harmadik határérték nem létezik.

Mint látjuk, a határérték definíció szerinti kiszámítása elég hosszadalmas. Nem kell azonban „megijedni", vannak egyszerűbb módszerek is a függvények határértékeinek kiszámítására – ezeket a későbbiekben ismertetjük.

Az előző példában eljutottunk másfajta határértékek bevezetésének szükségességéhez is. A további állítások egyszerűbb megfogalmazásához célszerű most bevezetni a folytonosság fogalmát. Ha a függvény valamilyen természeti vagy közgazdasági jelenség időbeli változását szemlélteti, akkor a függvény folytonossága azt tükrözi, hogy a változás folyamatos, hirtelen ugrások nem következnek be. Gondoljunk csak például a testsúlyunk vagy hőmérséklet változására, mint az idő függvényére. Itt a változást nyilván folyamatosnak feltételezzük – a függvény értéke nem ugrik egyik értékről a másikra úgy, hogy a közbülső értékeket fel ne venné. Másrést azonban ez a függvény nem folytonos, mivel a súlyt (a hőmérsékletet) kilogrammban (fokokban) szoktuk megadni és ilyenkor általában egész vagy racionális számértékeket feltételezünk – nem szoktuk azt mondani például, hogy a hőmérséklet $\sqrt{2}$ Celsius fok. Vagy nézzük a Budapesti Érték Tőzsde napi záró értékeit, ezek mind egész számok. Különböző közgazdasági elemzéseknél mégis könnyebb a számításokat elvégezni folytonos függvények feltételezése mellett.

6.4 Definíció Az $f:D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt az $a \in D$ pontban ***folytonosnak*** nevezzük, ha minden a-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbf{N} \to D$ sorozat esetén a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Ekkor az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatok mindegyike $f(a)$-hoz konvergál. Az a ***szakadási helye*** f-nek, ha f nem folytonos a-ban.

függvény (pontbeli) folytonossága

szakadási hely

6.5 Tétel Az $f:D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény akkor és csak akkor folytonos értelmezési tartományának valamely $a \in D$ pontjában, ha ott létezik határértéke és ez a határérték egyenlő $f(a)$-val –

$$\text{létezik } \lim_{x \to a} f(x) \text{ és } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

függvény (pontbeli) folytonossága

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

6.6 Definíció Az $f:D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt ***folytonosnak*** nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

folytonos függvény

A függvények határértékének kiszámítását nagymértékben megkönnyítik az alábbi – a számsorozatok határértékeinek tulajdonságaihoz hasonló, azokból egyszerűen közvetkező – állítások.

6.7 Tétel Legyenek $g, f : D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvények, a torlódási pontja D-nek, továbbá

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a} g(x) = B.$$

Ekkor

(1) az $f + g$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$$

(2) az $f \cdot g$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$$

(3) $B \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

műveleti tételek

Megjegyzés: Hasonló állítás fogalmazható meg az összetett függvény határértékéről is.

függvények folytonossága

6.8 Tétel Tegyük fel, hogy a $g, f : D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvények folytonosak az a pontban. Ekkor

(1) az $f + g$ függvény is folytonos az a pontban,

(2) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az a pontban,

(3) $g(a) \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos az a pontban,

(4) ha g folytonos az x_0 helyen és f folytonos az $y_0 = g(x_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény folytonos az x_0 pontban, ahol $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = g(y_0)$.

folytonos függvények

6.9 Tétel Az alábbi függvények folytonosak. Más szavakkal: az alábbi függvényeknek értelmezési tartományuk minden pontjában létezik határértéke, és ez a határérték egyenlő az adott pontban felvett helyettesítési értékkel, azaz

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = C$, ahol $C \in \mathbf{R}$;

(2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x$;

(3) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$;

(4) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = e^x$;

(5) $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x) = \ln x$.

6.10 Következmény A polinomok, a racionális törtfüggvények, a trigonometrikus függvények, az exponenciális függvények és a logaritmus függvények – folytonos függvények.

Az utóbbi állítás első ránézésre furcsán hangzik (hogy lehet például a tangens függvény folytonos, hiszen vannak szakadási pontjai). Még egyszer felhívjuk a figyelmet arra, hogy itt és a továbbiakban a folytonosságot mi a 6.6 definícióban megfogalmazottak szerint értjük.

A függvény határértékének és folytonosságának a definícióját a számsorozatok határértékének segítségével adtuk meg. Létezik egy másik megközelítési módszer is, a definícióknak ún. $\varepsilon\delta$ -nyelven való megfogalmazása.

6.11 Definíció Azt mondjuk, hogy $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvénynek az a pontban vett határértéke A, azaz $\lim_{x \to a} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (ε-tól függő) $\delta > 0$ valós szám, hogy minden x, $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

függvény (pontbeli) határértéke ***$\varepsilon\delta$-nyelven***

$\lim_{x \to a} f(x) = A$

Ez a definíció azt jelenti, hogy bármilyen kis $\varepsilon > 0$ is választunk, mindig tudunk olyan – a választott ε-tól függő $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot találni, hogy amennyiben x közelebb van a-hoz mint δ (és $x \neq a$), akkor az $f(x)$ érték A-tól vett távolsága kisebb ε-nál. Megjegyezzük, hogy a 6.2 és a 6.11 definícióban megfogalmazott két állítás ekvivalens egymással. Nézzük most a folytonosság fogalmának a 6.4 definícióban és a 6.5 tételben megfogalmazott állításokkal ekvivalens ún. $\varepsilon\delta$-nyelven történő megadását.

6.12 Definíció Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt az $a \in D$ pontban ***folytonosnak*** nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (ε-tól függő) $\delta > 0$ valós szám, hogy minden x, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

függvény (pontbeli) folytonossága ***$\varepsilon\delta$-nyelven***

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Már a 6.3 példában láttuk, hogy függvénynek a véges helyen vett véges határértéke mellett találkozhatunk más típusú határértékekkel is. Definiáljuk most ezeket.

6.13 Definíció Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvénynek az a pontban – ahol a torlódási pontja $(-\infty, a] \cap D$-nek – létezik ***bal oldali határértéke***, ha minden olyan $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, amelyre $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ ($x_n \in D$, $x_n < a$) a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Ekkor az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatok mindegyike egy és ugyanahhoz az A számhoz konvergál, amit az f ***függvény*** a ***pontbeli bal oldali határértékének*** nevezünk.

Jele: $\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ vagy $\lim_{a^-} f(x) = A$.

függvény bal oldali határértéke

$\lim_{x \to a^-} f(x) = A$

függvény jobb oldali határértéke

$\lim_{x \to a^+} f(x) = A$

6.14 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvénynek az a pontban – ahol a torlódási pontja $D \cap [a, +\infty)$-nek – létezik ***jobb oldali határértéke***, ha minden olyan $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, amelyre $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ ($x_n \in D$, $a < x_n$) a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Ekkor az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatok mindegyike egy és ugyanahhoz az A számhoz konvergál, amit az *f* ***függvény a pontbeli jobb oldali határértékének*** nevezünk.

Jele: $\lim_{x \to a^+} f(x) = A$ vagy $\lim_{a^+} f(x) = A$.

balról (jobbról) folytonos függvény

6.15 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt az $a \in D$ pontban ***balról (jobbról) folytonosnak*** nevezzük, ha az f függvény $(-\infty, a] \cap D$ halmazra ($D \cap [a, +\infty)$ halmazra) való leszűkítése folytonos a-ban.

Könnyen igazolható az alábbi állítás.

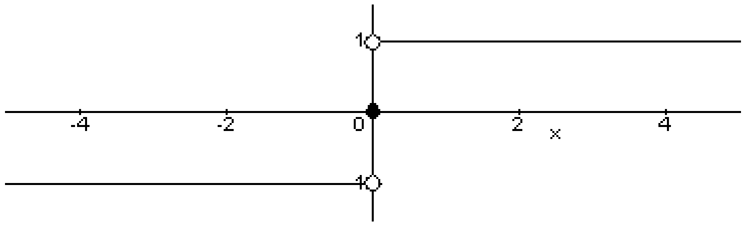
6.16 Tétel Az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvénynek az a pontban akkor és csak akkor létezik határértéke, ha az a pontban létezik bal oldali és jobb oldali határértéke, és ezek egyenlőek. Szimbólumokkal:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \quad \exists \lim_{x \to a^-} f(x) = A; \\ (2) \quad \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = B; \\ (3) \quad A = B. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt, pontosabban e függvény határértéke létezésének kérdését az $x = 0$ pontban.

Szignumfüggvény (előjel-függvény)

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0; \\ -1, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



6.1 ábra

A függvény értelmezéséből látszik, hogy minden negatív szám esetén a függvény értéke –1 és minden pozitív szám esetén 1. Így a definíció alapján a függvény $x = 0$ pontban vett bal oldali határértéke $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ és jobb oldali határértéke $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Mivel ez a két egyoldali határérték nem egyezik meg egymással, ezért a függvénynek nem létezik határértéke az $x = 0$ pontban, következésképpen folytonos sem lehet ebben a pontban.

Vegyük észre, hogy a 6.2, a 6.12 és a 6.13 definíciók csak az $x_n \neq a$, az $x_n < a$ és az $a < x_n$ feltételekben különböznek egymástól.

Röviden fogalmazva úgy is mondhatnánk, hogy az *f* függvény *a* pontbeli határértéke $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (bal oldali határértéke $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$, jobb oldali határértéke $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$), ha minden olyan $\langle x_n \rangle$ számsorozatra, amelyre $x_n \in D$, $\left\{ \begin{matrix} x_n \neq a \\ x_n < a \\ a < x_n \end{matrix} \right\}$ és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ számsorozat *A*-hoz tart.

Most a függvényhatárértékek definíciójának azon eseteire térünk át, amelyek a „végtelennel" kapcsolatosak.

függvény (pontbeli) határértéke, végtelen

6.17 Definíció Legyen *f*:$D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény, és *a* torlódási pontja D-nek. Az ***f*-nek az *a* pontban a határértéke** $+\infty$ illetve $-\infty$**,** ha minden olyan $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, amelyre $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ $(x_n \in D,\ x_n \neq a)$, a megfelelő $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$. Jelöléseket alkalmazva:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ vagy $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$ illetve

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Megjegyzés. A 6.12 és a 6.13 definícióhoz hasonlóan definiáljuk azt, hogy a függvény valamely a pontban vett bal oldali (jobb oldali) határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$.

függvény

6.18 Definíció Legyen az *f*:$D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény *D*

határértéke

„végtelenben véges"

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

„végtelenben végtelen"

értelmezési tartománya felülről (alulról) nem korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek ***a plusz (mínusz) végtelenben létezik határértéke,*** ha minden olyan $\langle x_n\rangle$ sorozat esetén, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ $(-\infty)$, a megfelelő $\langle f(x_n)\rangle$ sorozat konvergens. Ekkor ezen $\langle f(x_n)\rangle$ sorozatok mindegyike egy és ugyanahhoz az A számhoz konvergál, amit az *f* ***függvény plusz (mínusz) végtelenben vett határértékének*** nevezünk. Jelben:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ vagy } \lim_{+\infty} f(x)=A \text{ illetve}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ vagy } \lim_{-\infty} f(x)=A.$$

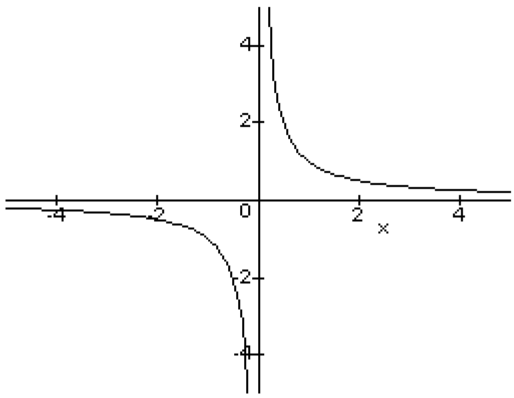
Megjegyzés. Értelemszerűen – 6.17 definícióhoz hasonlóan – definiáljuk azt, hogy a függvény plusz (mínusz)végtelenben vett határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$.

A fent definiált határértékek némelyikének szemléltetésére – mely határértékekből összesen tizenöt van (lásd a 6.10 gyakorló feladatot) – vegyük az ismert reciprok-függvényt

$$f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{x}.$$

Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$$



6.2 ábra

Bizonyítás nélkül megemlítünk még néhány nevezetes határértéket, valamint azokat a fontos az állításokat, amelyeket már (tudat alatt) használtunk a 3. fejezetben a függvények vázolásakor.

6.19 Tétel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ és $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, ahol $a>0$.

6.20 Tétel $\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$, ahol $a>1$ és $\alpha\in\mathbf{R}$.

6.21 Tétel $\lim_{x\to\infty}x^\alpha=\begin{cases}\infty, & \text{ha } \alpha>0,\\ 1, & \text{ha } \alpha=0,\\ 0, & \text{ha } \alpha<0.\end{cases}$

6.22 Tétel $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$, ahol $a\in\mathbf{R}$.

6.23 Tétel Legyen $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ és $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Ha f folytonos, akkor f korlátos.

6.24 Tétel (Weierstrass-tétel) Legyen $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ és $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Ha f folytonos, akkor létezik olyan $x_1,x_2\in[a,b]$, amelyekkel $f(x_1)=\inf R_f$ és $f(x_2)=\sup R_f$.

6.25 Tétel (Bolzano-tétel) Legyen $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ és $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Ha f folytonos, és $f(a)\neq f(b)$ akkor f minden értéket felvesz az $f(a)$ és $f(b)$ között.

Ellenőrző kérdések a 6. fejezethez

E.6.1 A számhalmaz torlódási pontjának definíciója.

E.6.2 A függvény pontbeli határértékének definíciója.

E.6.3 A függvény pontbeli folytonosságának definíciója.

E.6.4 A függvény szakadási helyének definíciója.

E.6.5 A folytonos függvény definíciója.

E.6.6 Fogalmazzuk meg a függvény határértéke és műveletek kapcsolatáról szóló tételeket.

E.6.7 A függvény pontbeli határértékének definíciója $\varepsilon\delta$ -nyelven.

E.6.8 A függvény bal (jobb) oldali határértékének definíciója.

E.6.9 A balról (jobbról) folytonos függvény definíciója.

E.6.10 Fogalmazzuk meg az alábbi definíciókat!

E.6.10.a) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ **E.6.10.b)** $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$ **E.10.6.c)** $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$

E.6.10.d) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ **E.6.10.e)** $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ **E.10.6.f)** $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

E.6.10.g) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ **E.6.10.h)** $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ **E.10.6.i)** $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

E.6.10.j) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$ **E.6.10.k)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$

E.6.10.j) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ **E.6.10.k)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

E.6.10.l) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ **E.6.10.m)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Gyakorló feladatok a 6. fejezethez

G.6.1 Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

G.6.1.a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2+6x-9}{x^2+8x+15}$, ahol $a=-3;1;4;-5;+\infty;-\infty$ (vázoljuk a grafikonját!)

G.6.1.b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^2+12x-48}{x^2+10x+24}$, ahol $a=-6;-4;2;6;+\infty;-\infty$ (vázoljuk a grafikonját!)

G.6.1.c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^3+12x^2-48x}{x^2+10x+24}$, ahol $a=-6;-4;2;6;+\infty;-\infty$

G.6.1.d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^2+6x-36}{x^2+5x+6}$, ahol $a=-3;-2;2;3;-\infty;+\infty$ (vázoljuk a grafikonját!)

G.6.1.e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^2+6x-36}{x^3+5x^2+6x}$, ahol $a=-3;-2;2;3;-\infty;+\infty$

G.6.2 Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

G.6.2.a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{5x}$ **G.6.2.b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 9x}{5x}$ **G.6.2.c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 5x}$

G.6.2.d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} 5x}$ **G.6.2.e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} 9x}{\operatorname{ctg} 5x}$

G.6.2.f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$ **G.6.2.g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{3x}$ **G.6.2.h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$

G.6.2.i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 3x}$ **G.6.2.j)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} 7x}{\operatorname{ctg} 3x}$

G.6.2.k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x^2}{5x^2}$ **G.6.2.l)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 9x^2}{5x^2}$

G.6.2.m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x^2}{\sin 5x^2}$ **G.6.2.n)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 9x^2}{\operatorname{tg} 5x^2}$

G.6.2.o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{5x^2}$ **G.6.2.p)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 9x}{5x^2}$

G.6.2.q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{\sin^2 5x}$ **G.6.2.**r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 9x}{\operatorname{tg}^2 5x}$

G.6.3.a) Folytonos-e az alábbi függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 - 36x + 48}{x^2 - x - 2} & \text{ha } x \notin \{-1; 2\} \\ 6 & \text{ha } x = 2 \\ -4 & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

G.6.3.b) Folytonos-e az alábbi függvény az $x = 3$ pontban? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 3} & \text{ha } x \notin \{-1; 3\} \\ 1 & \text{ha } x = 3 \\ 5 & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

G.6.3.c) Folytonos-e az alábbi függvény az $x = 2$ pontban? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 24x + 32}{x^2 - 8x + 12} & \text{ha } x \notin \{2; 6\} \\ 2 & \text{ha } x = 2 \\ 5 & \text{ha } x = 6 \end{cases}$$

G.6.3.d) Folytonos-e az alábbi függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 4)(x - 5)}{x^2 - 3x - 10} & \text{ha } x \notin \{-2; 5\} \\ 4 & \text{ha } x = -2 \\ 3 & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

G.6.3.e) Folytonos-e az alábbi függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^2-45x+90}{x^2-7x+12} & \text{ha } x\notin\{3;4\}\\ 15 & \text{ha } x=3\\ 5 & \text{ha } x=4\end{cases}$$

G.6.3.f) Folytonos-e az alábbi függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-18x+24}{x^2-9x+20} & \text{ha } x\notin\{4;5\}\\ -6 & \text{ha } x=4\\ 3 & \text{ha } x=5\end{cases}$$

G.6.3.g) Folytonos-e az alábbi függvény az $x=-2$ pontban? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben! Számítsuk ki a függvény bal oldali és jobb oldali határértékét az $x=6$ pontban!

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-8x-32}{x^2-4x-12} & \text{ha } x\notin\{-2;6\}\\ 3 & \text{ha } x=-2\\ 9 & \text{ha } x=6\end{cases}$$

G.6.3.h) Folytonos-e az alábbi függvény? Vázoljuk a függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény határértékét a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben!

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-9)(x+5)}{x^2+2x-15} & \text{ha } x\notin\{-5;\ 3\}\\ -2 & \text{ha } x=-5\\ 6 & \text{ha } x=3\end{cases}$$

G.6.4 Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

G.6.4.a) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-17x+66}{x^3-19x^2+78x}\sin(3x)$

G.6.4.b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-17x+66}{x^3-19x^2+78x}\sin(3x)$

G.6.4.c) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-17x+66}{x^3-19x^2+78x}\sin(3x)$

G.6.4.d) $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{x^2-17x+66}{x^3-19x^2+78x}\sin(3x)$

G.6.4.e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-17x+66}{x^3-19x^2+78x}\sin(3x)$

G.6.4.f) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-13x+40}{x^3-11x^2+24x}\sin(7x)$

G.6.4.g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-13x+40}{x^3-11x^2+24x}\sin(7x)$

G.6.4.h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-13x+40}{x^3-11x^2+24x}\sin(7x)$

G.6.4.i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-13x+40}{x^3-11x^2+24x}\sin(7x)$

G.6.4.j) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-13x+40}{x^3-11x^2+24x}\sin(7x)$

G.6.4.k) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-15x+54}{x^3-13x^2+36x}\sin(5x)$

G.6.4.l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-15x+54}{x^3-13x^2+36x}\sin(5x)$

G.6.4.m) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-15x+54}{x^3-13x^2+36x}\sin(5x)$

G.6.4.n) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-15x+54}{x^3-13x^2+36x}\sin(5x)$

G.6.4.o) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-15x+54}{x^3-13x^2+36x}\sin(5x)$

G.6.5 Az *A*, *B* és *C* paraméterek alkalmas választásával adjuk meg az **R** azon legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvény folytonos!

G.6.5.a) f: **R** →**R**, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-15}{x^3+10x^2+21x}\sin 6x & x\neq\{-7,-3,0\}\\ A & x=-7\\ B & x=-3\\ C & x=0\end{cases}$

G.6.5.b) f: **R** →**R**, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-10x+21}{x^3-8x^2+15x}\sin 5x & x\neq\{0,3,5\}\\ A & x=0\\ B & x=3\\ C & x=5\end{cases}$

G.6.5.c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-21}{x^3+2x^2-15x}\sin 3x & x \neq \{-5,0,3\} \\ A & x=-5 \\ B & x=0 \\ C & x=3 \end{cases}$

G.6.5.d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x-21}{x^3+8x^2+15x}\sin 6x & x \neq \{-5,-3,0\} \\ A & x=-5 \\ B & x=-3 \\ C & x=0 \end{cases}$

G.6.5.e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-12x+35}{x^3-8x^2+15x}\sin 3x & x \neq \{0,3,5\} \\ A & x=0 \\ B & x=3 \\ C & x=5 \end{cases}$

G.6.5.f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-35}{x^3-10x^2+21x}\sin 5x & x \neq \{0,3,7\} \\ A & x=0 \\ B & x=3 \\ C & x=7 \end{cases}$

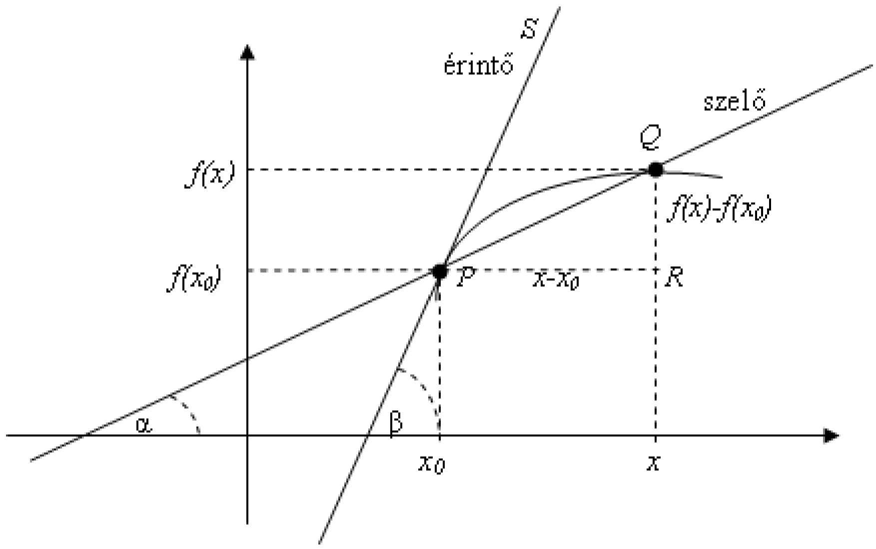
7. Differenciálszámítás

Szinte minden tudományágban, így a természettudományokban, a műszaki tudományokban és a közgazdaságtanban is, fontos annak vizsgálata, hogy milyen gyorsan változnak bizonyos mennyiségek. A változás mértékének leírására szolgáló fogalom a differenciálhányados (derivált), amely a matematikai analízis egyik központi fogalma. Segítségével számos elméleti és gyakorlati probléma válik könnyen megoldhatóvá. Ebben a fejezetben megismerkedünk a függvény deriváltjának a fogalmával és annak gyakorlati alkalmazásával a függvények vizsgálatához.

A differenciálszámítás és a vele szoros kapcsolatban lévő integrálszámítás alapjait Isaac Newton (1642-1727) és Gottfried Leibniz (1646-1716) fektette le egymástól függetlenül.

7.1 A differenciálhányados fogalma, geometriai jelentése és közgazdasági értelmezése

A differenciálhányados fogalmának megadásához induljuk ki a geometriai értelmezésből. Tekintsük az f függvény grafikonját (görbéjét) az *xy*-síkban és rögzítsünk rajta egy *P* pontot. Válasszunk a görbén egy *P*-től különböző *Q* pontot. A *P* és *Q* pontokon átmenő egyenest a görbe ***szelőjének*** nevezzük. Ha a *Q* pont a grafikon mentén a rögzített *P* pont felé mozog, akkor a szelő a *P* körül fordul el. A függvény-grafikon *P* pontjába húzott ***érintőjének*** azt az *PS* egyenest nevezzük, amelyhez a szelők tartanak, amikor a *Q* pont a *P*-hez tart. Határozzuk meg az érintő meredekségét, vagyis a β szög nagyságát!



7.1. ábra

A gondolatmenetet a 7.1 ábra szemlélteti. A grafikon rögzített *P* pontjának koordinátái legyenek $(x_0, f(x_0))$ és a *Q* pont koordinátái pedig $(x, f(x))$. A szelő és az *x* tengely által alkotott α szög megegyezik a *QPR* szöggel. A *PQR* derékszögű háromszögben a QPR szöggel szemben lévő és nevezett szög melletti befogó aránya adja e szög tangensét:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} QPR = \frac{|QR|}{|PR|} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Amint a Q pontot közelítjük a P-hez, úgy az abszcissza tengelyen x tart az x_0-hoz és a szelő átmegy az érintőbe. Következésképpen a P pontba húzott érintő meredeksége, vagyis az érintő és az x tengely által alkotott β szög tangense egyenlő

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

7.1 Definíció Az $f\colon D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt az értelmezési tartományának x_0 belső pontjában ***differenciálhatónak*** nevezzük, ha létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ véges határérték. Ekkor ezt a számot az f függvény x_0 pontbeli ***differenciálhányadosának*** nevezzük. Jele: $f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

differen-ciálható függvény

differenciál-hányados

Megjegyzés. A

$$d_{x_0}^f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R},\ d_{x_0}^f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

függvényt az f függvény x_0-hoz tartozó ***differencia-hányados-függvényének*** nevezzük.

differencia-hányados-függvény

Ha a $d_{x_0}^f$ függvénynek x_0-ban bal, illetve jobb oldali határértéke létezik, akkor ***bal,*** illetve ***jobb oldali differenciál-hányadosról*** beszélünk, melyeket $f_-'(x_0)$, illetve $f_+'(x_0)$ módon jelölünk.

Megjegyezzük, hogy a fenti határértéket (bevezetve a $h = x - x_0$ jelölést) a következőképpen is felírhatjuk:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A differenciálhányados geometriai jelentése: $f'(x_0)$ az f függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintő ún. iránytangense, azaz az érintő és az x tengely által alkotott szög tangense. Az érintő egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

differenciál-hányados geometriai jelentése

Közgazdaságtanban a ***határ*** szót használják a derivált jelölésére. Legyen például *C(x)* valamilyen termék *x* egységének előállítási költsége, *R(x)* az *x* egység eladásából származó bevétel és *P(x)* az *x* egység eladásából származó profit. Ekkor $C'(x)$-et ***határköltségnek***, $R'(x)$-et ***határbevételnek*** és $P'(x)$-et ***határprofitnak*** nevezik (*x*-ben).

A $C'(x)$ határköltséget például a következőképpen kapjuk meg:

$$C'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}.$$

Ha nagy számú terméket állítunk elő, azaz *x* elég nagy ahhoz, hogy hozzá képest a $h=1$ nullához közeli értéknek tekinthető, akkor

$$C'(x)\approx\frac{C(x+1)-C(x)}{1}=C(x+1)-C(x).$$

A határköltség tehát közelítően egyenlő a $C(x+1)-C(x)$ költségnövekedéssel – azzal a többletköltséggel, ami ahhoz szükséges, hogy az *x* számú termék helyett $x+1$-et állítsunk elő. Olyan elemi közgazdaságtan jegyzetekben, ahol a differenciálszámítás pontos fogalmait mellőzik, a határköltséget éppen a $C(x+1)-C(x)$ különbségként definiálják.

differenciál-hányados függvény

derivált

7.2 Definíció Legyen $f{:}D\to\mathbf{R}$ egyváltozós függvény és

$$A=\{x_0\in D\mid f \text{ differenciálható } x_0-\text{ban}\}.$$

Az

$$f'{:}\,A\to\mathrm{R},\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

függvényt az *f* függvény ***differenciálhányados függvényének*** vagy ***deriváltjának*** nevezzük.

Megjegyzés. Nem tévesztendő össze a differen**cia**hányados-függvény és a differen**ciál**hányados függvény**.**

7.3 Példa Számítsuk ki az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=5x^2+3x-2$ függvény differenciálhányadosát az $x_0=2$ pontban!

A definíció értelmében:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^2+3x-2-(5\cdot 2^2+3\cdot 2-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5x^2+3x-26}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(5x+13)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(5x+13)=23.$$

A következőkben megadjuk az elemi függvények deriváltjait, valamint az összeg, a szorzat, a hányados és az összetett függvény deriválásának szabályait, amelyek jelentősen megkönnyítik az egyes függvények konkrét pontokban vett differenciálhányadosainak kiszámítását. Ezeket megelőzően most vizsgáljuk meg, milyen kapcsolatban van a függvény differenciálhatósága a folytonossággal.

a deriválhatóság és a folytonosság kapcsolata

7.4 Tétel Ha az $f\!:D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény differenciálható az értelmezési tartományának egy belső x_0 pontjában, akkor folytonos is ebben a pontban.

Bizonyítás. Adva, hogy létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbf{R}$$

véges határérték. Bizonyítandó, hogy ekkor f folytonos az x_0 pontban, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nyilván az értelmezési tartomány minden $x \neq x_0$ pontjára igaz a következő egyenlőség:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\,.$$

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ határértéket felhasználva a fenti egyenlőséget és a 6.7 tételt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}\left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right) =$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0)\,.$$

Mivel a feltételezés szerint létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ véges határérték, ezért

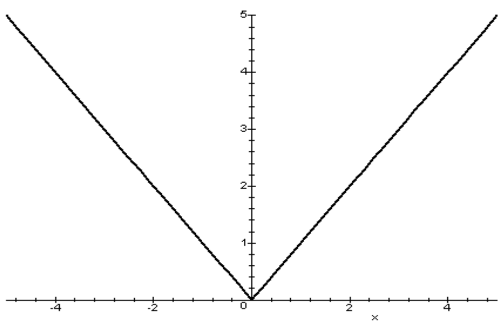
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)\,.$$

Állításunkat igazoltuk.

Az állítás megfordítása nem igaz. Például az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |\,x\,|$$

abszolútérték-függvény folytonos, de az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.



7.2 ábra

Könnyen látható ugyanis, hogy az $x_0 = 0$ pontban a bal oldali differenciálhányados

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

és ugyanott a jobb oldali differenciálhányados

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

második derivált

n-edik derivált

7.5 Definíció Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény differenciálható az $A \subseteq D$ halmazon, és deriváltját jelölje f'. Ha az f' függvény differenciálható az $A \subseteq D$ halmazon, akkor azt mondjuk, hogy az *A* halmazon *f* kétszer differenciálható, és az f' függvény deriváltját az *f* függvény ***második deriváltjának*** nevezzük. Jele: f''.

Hasonlóan definiáljuk a függvény *n*-edik deriváltját:

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' = (f')', \cdots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

A gyakorlati munkánk során, amikor a természeti vagy gazdasági jelenségek közötti összefüggéseket próbáljuk vizsgálni, általában bonyolult függvényekkel kell dolgoznunk. Munkánk megkönnyítésére célszerű ezeket a bonyolult összefüggéseket leíró függvényeket olyan egyszerűbb függvényekkel helyettesíteni, amelyek (valamilyen értelemben) jól közelítik az eredetit. A legegyszerűbb a lineáris függvény, így természetesen adódik, hogy a bonyolult függvényekre először „lineáris közelítést” keressünk.

A differenciálhányados bevezetésénél láttuk, hogy az f függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintő egyenlete: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ha az f függvény grafikonját az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintővel, vagyis a függvényt az érintő-egyenest leíró lineáris függvénnyel helyettesítjük, akkor lineáris közelítésről beszélünk.

lineáris közelítés

7.6 Definíció Legyen *D* valós intervallum és az $f{:}D \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható. Az f függvény ***lineáris közelítése*** az a pont környezetében (ha x közel van a-hoz):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

A másodfokú közelítés fogalma bonyolultabb, de a lineáristól pontosabb.

másodfokú közelítés

7.7 Definíció Legyen *D* valós intervallum és az $f{:}D \to \mathbf{R}$ függvény kétszer differenciálható. Az f függvény ***másodfokú közelítése*** az a pont környezetében:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2.$$

A függvény harmad-, $\cdots$, n-edfokú közelítésének bevezetéséhez szükségünk van a következő fogalomra.

7.8 Definíció Legyen $n \in \mathbf{N}$. Az $n!$ szimbólummal jelölt, és

$$0! = 1; \qquad n! = (n-1)!n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \qquad (n > 0)$$

képlettel megadott számot n ***faktoriálisnak*** nevezzük.

faktoriális

7.9 Definíció Legyen D valós intervallum és az $f{:}D \to \mathbf{R}$ függvény n-szer differenciálható. Az f függvény ***n-edfokú közelítése*** az a pont környezetében:

$$f(x) \approx$$

$$\approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Az egyenlőség jobb oldalán lévő polinomot az f függvény $x = a$ környezetében vett ***n-edrendű Taylor-polinomjának*** nevezzük.

n-edfokú közelítés

Taylor-polinom

Közelítő számításoknál mindig nagyon fontos megvizsgálni azt, mekkora hibát követünk el. Ehhez nyújt segítséget a következő állítás.

7.10 Tétel (Taylor-tétel) Legyen D valós intervallum és az $f{:}D \to \mathbf{R}$ függvény $(n+1)$-szer differenciálható. Ha $x, x_0 \in D$, akkor létezik olyan ξ az x és x_0 által meghatározott nyílt intervallumban (illetve $x = x_0$ esetén $\xi = x_0$), amellyel

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

Taylor-formula

7.11 Definíció A fenti egyenlőséget ***Taylor-formulának***, a benne szereplő utolsó tagot pedig ***maradéktagnak*** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a Taylor-polinom maradéktagja „nagyon gyorsan” tart a nullához, ugyanis például $\frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} < 10^{-6}$, $\frac{1}{15!} = \frac{1}{1307674368000} < 10^{-12}$ és $\frac{1}{20!} = \frac{1}{2432902008176640000}$ már kisebb, mint 10^{-18}.

A számítógépek a Taylor-formulán alapuló módszerek segítségével végzik el az ismert függvényekkel (sin, cos, log stb.) való számításokat.

7.2 Elemi függvények deriváltja, differenciálási szabályok

7.12 Tétel Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény $f':D \to \mathbf{R}$ deriváltja a következő:

(1) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = C \quad (C \in \mathbf{R})$	$f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = 0$,
(2) $f:\mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^n \ \ (n \in \mathbf{Z})$	$f':\mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f'(x) = n \cdot x^{n-1}$,
(3) $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R})$	$f':\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$,
(4) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = e^x$	$f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = e^x$,
(5) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = a^x \quad (a \in \mathrm{R}^+)$	$f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = a^x \cdot \ln a$,
(6) $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x) = \ln x$	$f':\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{1}{x}$,
(7) $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_a x \quad (a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\})$	$f':\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,
(8) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$	$f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = \cos x$,
(9) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \cos x$	$f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = -\sin x$,
(10) $f:\mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbf{R},\ \ f(x) = \operatorname{tg} x$	$f':D \to \mathbf{R},\ \ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$,
(11) $f:\mathbf{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f':D \to \mathbf{R},\ \ f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti táblázat második oszlopában is függvények szerepelnek, tehát az f függvény differenciálhányadosa az x_0 pontban egyenlő az f' függvény x_0 pontban vett helyettesítési értékével.

7.13 Példa Számítsuk ki az $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^5$ függvény differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ pontban!

A táblázat második sora szerint $f':\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f'(x) = 5x^4$, tehát $f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$.

7.14 Tétel Legyen az $f : D_f \to \mathbf{R}$ és a $g : D_g \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény differenciálható az értelmezési tartományának x_0 pontjában. Ekkor ebben a pontban

differenciálási szabályok

(1) minden $c \in \mathbf{R}$ esetén a cf függvény is differenciálható, és

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0);$$

$$(cf)' = c \cdot f'$$

(2) az $f + g$ is differenciálható, és

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

(3) az $f \cdot g$ függvény is differenciálható, és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(4) $g(x_0) \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

(5) Ha g differenciálható az $x_0 \in D_g$ pontban és f differenciálható az $y_0 = g(x_0) \in D_f$ pontban, akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható x_0-ban, és

$$(f \circ g)'(x_0) = \left(f(g(x_0))\right)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

7.15 Példa Az $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 7\operatorname{ctg} x + 5x^3$ függvény deriváltja:

$$f' : D \to \mathrm{R},\quad f'(x) = (7\operatorname{ctg} x)' + (5x^3)' = 7\frac{-1}{\sin^2 x} + 15x^2.$$

7.16 Példa Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5^x \sin x$ függvény deriváltja:

$$f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f'(x) = 5^x \ln 5 \cdot \sin x + 5^x \cdot \cos x.$$

7.17 Példa Az $f : \mathbf{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja:

$$f' : \mathrm{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathrm{R},\quad f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7.3 Differenciálható függvények vizsgálata

Most rátérünk a függvény azon tulajdonságainak (monotonitás, szélsőérték stb.) vizsgálatára, amelyek a függvény differenciálhányadosának segítségével könnyen elemezhetők.

lokálisan növekvő (csökkenő) függvény

7.18 Definíció Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt az értelmezési tartományának x_0 pontjában ***lokálisan növekvőnek (csökkenő-nek)*** nevezzük, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, hogy $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$, továbbá

minden $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ $\left(f(x) \geq f(x_0)\right)$

és minden $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$ $\left(f(x_0) \geq f(x)\right)$

.

Megjegyezzük, hogy a lokális változás (növekedés vagy csökkenés) a függvény értelmezési tartományának ***belső pontjára*** vonatkozóan értendő, amire a definícióban az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ feltétel utal.

Könnyen igazolható az alábbi állítás, amely a pontbeli lokális növekedés illetve csökkenés valamint a függvény (intervallumon vett) monotonitása közötti kapcsolatot jellemzi.

7.19 Tétel Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának $I \subseteq D$ nyílt intervallumán akkor és csak akkor monoton növekvő (csökkenő), ha az I intervallum minden pontjában lokálisan növekvő (csökkenő).

7.3.1 A monotonitás és a derivált kapcsolata, a lokális szélsőértékhely létezésének feltételei

Elérkeztünk végre ahhoz – a függvényvizsgálatnál nagyon fontos állításhoz –, amely a függvény monotonitását a függvény deriváltjának előjelével jellemzi.

7.20 Tétel Legyen az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának $I \subseteq D$ nyílt intervallumán differenciálható.

Ha a függvény deriváltja pozitív az I intervallumon, vagyis

$$f'(x_0) > 0 \text{ minden } x_0 \in I \text{ pontban,}$$

akkor a függvény szigorúan monoton növekvő ezen az intervallumon.

Ha a függvény deriváltja negatív az I intervallumon, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő ezen az intervallumon.

a monoton növekedés (csökkenés) elégséges feltétele

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a függvény deriváltja pozitív az I intervallumon, vagyis

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

minden $x_0 \in I$ pontban. Igazolható, hogy ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, amelyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{, ha } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\text{, } x \neq x_0 .$$

Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, vagyis

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) > 0, \\ x - x_0 > 0 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} f(x) - f(x_0) < 0, \\ x - x_0 < 0 \end{cases}.$$

Következésképpen

$$\text{minden } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \text{ esetén } f(x) < f(x_0)$$

és

$$\text{minden } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{ esetén } f(x_0) < f(x) .$$

Tehát a függvény minden $x_0 \in I$ pontban szigorúan lokálisan növekvő, és így – a 7.19 tétel alapján – az f szigorúan monoton növekvő az I intervallumon. Hasonlóan igazolható állításunk második része.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz. A szigorú monoton növekedésből nem következik, hogy a derivált mindenütt pozitív. Például, a szigorúan monoton növekvő $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ függvény deriváltja az $x_0 = 0$ pontban egyenlő nullával.

Az előző tételhez hasonlóan igazolható a következő állítás.

a monoton növekedés (csökkenés) szükséges feltétele

7.21 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának $I \subseteq D$ nyílt intervallumán differenciálható. Ha a függvény szigorúan monoton növekvő (csökkenő) az I intervallumon, akkor a függvény deriváltja nemnegatív (nempozitív) ezen az intervallumon, vagyis

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \left(f'(x_0) \leq 0\right) \text{ minden } x_0 \in I \text{ esetén.}$$

A monotonitás vizsgálata után térjünk át a függvény szélsőértékhelyeinek meghatározására.

a lokális szélsőértékhely létezésének szükséges feltétele

7.22 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely x_0 belső pontjában differenciálható. Ha x_0 lokális szélsőértékhelye f-nek, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen x_0 lokális szélsőértékhelye f-nek és tegyük fel, hogy – az állítással ellentétben – $f'(x_0) \neq 0$. Legyen $f'(x_0) > 0$. Ekkor a 7.20 tétel alapján az f függvény lokálisan növekvő az x_0 pontban. Hasonlóan kapjuk, hogy $f'(x_0) < 0$ esetén az f függvény lokálisan csökkenő az x_0 pontban. Mindkét eset kizárja azt, hogy x_0 lokális szélsőértékhelye legyen f-nek. Tehát feltételezésünk – miszerint $f'(x_0) \neq 0$ – ellentmondáshoz vezet. Következésképpen $f'(x_0) = 0$. A tételt bebizonyítottuk.

stacionárius pontok

7.23 Definíció Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely x_0 belső pontjában differenciálható. Azokat az x_0 pontokat, ahol $f'(x_0) = 0$, az f függvény ***stacionárius pontjainak*** nevezzük.

Ha a függvény differenciálható, akkor szélsőértékhelye csak a stacionárius pontokban lehet. Azonban a függvénynek lehet szélsőértéke olyan pontban is, ahol nem differenciálható. Például az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ függvénynek az $x_0 = 0$ lokális minimumhelye (lásd 7.2 ábra), de az $x_0 = 0$ pontban f nem differenciálható.

Megjegyezzük, hogy az $f'(x_0) = 0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy az x_0 pont lokális szélsőértékhelye legyen f-nek. Például az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ függvény deriváltja az $x_0 = 0$ helyen egyenlő nullával, de az $x_0 = 0$ pont mégsem lokális szélsőértékhelye f-nek.

7.24 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely x_0 belső pontjában és annak valamely környezetében differenciálható. Ha

$$f'(x_0) = 0 \text{ és } f' \text{ előjelet vált } x_0\text{-ban,}$$

akkor x_0 lokális szélsőértékhelye *f*-nek. Mégpedig

(a) ha f' negatív értékből pozitívba megy át x_0-ban, akkor x_0 lokális minimumpontja f-nek,

(b) ha f' pozitív értékből negatívba megy át x_0-ban, akkor x_0 lokális maximumpontja f-nek.

a lokális szélsőértékhely létezésének elégséges feltétele

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f' az x_0 pontban negatív értékből pozitívba megy át. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$f'(x) < 0 \text{ minden } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \text{ esetén}$$

és

$$f'(x) > 0 \text{ minden } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{ esetén.}$$

Ezért, a 7.20 tétel alapján, f szigorúan monoton csökkenő az $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ intervallumon és szigorúan monoton növekvő az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon. Következésképpen *f*-nek az x_0 pontban lokális minimuma van. Hasonlóan igazolható állításunk a lokális maximumpontra vonatkozóan.

Megfogalmazunk egy másik, a 7.24 tételből közvetlenül adódó, elégséges feltételt a lokális szélsőértékhely létezésére.

7.25 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely x_0 belső pontjában kétszer differenciálható. Ha

$$f'(x_0) = 0 \text{ és } f''(x_0) \neq 0,$$

akkor x_0 lokális szélsőértékhelye *f*-nek, mégpedig

(a) $f''(x_0) > 0$ esetén x_0 lokális minimumpontja f-nek,

(b) $f''(x_0) < 0$ esetén x_0 lokális maximumpontja f-nek.

a lokális szélsőértékhely létezésének elégséges feltétele

Bizonyítás. Az $f''(x_0) > 0$ feltételből – a 7.20 tétel szerint – következik, hogy az f' függvény az x_0 pontban lokálisan növekvő, és mivel $f'(x_0) = 0$, ezért f' az x_0 pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át. Következésképpen, a 7.24 tétel értelmében, x_0 lokális minimumpontja f-nek. A lokális maximumpontra vonatkozó állításunk hasonlóan igazolható.

7.26 Példa Határozzuk meg az

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=x^3-9x^2+15x+9$$

függvény monotonitási intervallumait és lokális szélsőértékhelyeit!

Először is felírjuk a függvény deriváltját:

$$f':\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f'(x)=3x^2-18x+15.$$

Az $3x^2-18x+15=0$ másodfokú egyenletet megoldva kapjuk, hogy a derivált zérushelyei (az f függvény stacionárius pontjai) $x_1=1$ és $x_2=5$. Ezért a derivált felírható $f'(x)=3(x-1)(x-5)$ alakban, amiből könnyen látszik, hogy f' negatív az $(1,5)$ intervallumon és pozitív a $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ halmazon. Ezért a 7.20 tétel alapján f szigorúan monoton csökkenő az $(1,5)$ intervallumon és szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ halmazon. A 7.24 tétel alapján $x_1=1$ lokális maximumpontja f-nek és $f(x_1)=f(1)=16$, míg $x_2=5$ lokális minimumpontja f-nek és $f(x_2)=f(5)=-16$.

Az alábbi két 7.3 és 7.4 ábra az f függvényt és annak f' deriváltját ábrázolja. Javasoljuk, hogy gondoljuk át a példát úgy, hogy közben szem előtt tarjuk a 7.20 és a 7.24 tétel bizonyítását.

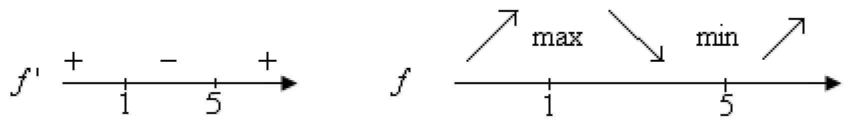
A $(-\infty,1)$ intervallumon f' pozitív, ezért az f szigorúan monoton növekvő.

Az $(1,5)$ intervallumon f' negatív, ezért az f szigorúan monoton csökkenő.

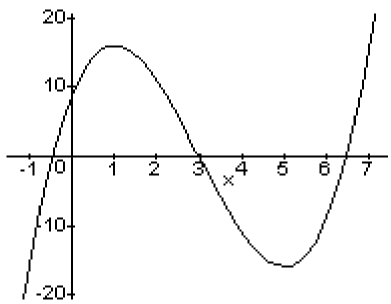
Az $(5,+\infty)$ intervallumon f' pozitív, ezért az f szigorúan monoton növekvő.

Mivel $f'(1)=0$ és f' pozitív értékből negatív értékbe megy át az $x_1=1$ helyen, ezért $x_1=1$ lokális maximumpont és $f(x_1)=f(1)=16$. Továbbá, az $x_2=5$ helyen $f'(5)=0$ és f' negatív értékből pozitív értékbe megy át, ezért $x_2=5$ lokális minimumpont és $f(x_2)=f(5)=-16$.

Az elmondottak vázlatos összefoglalása:

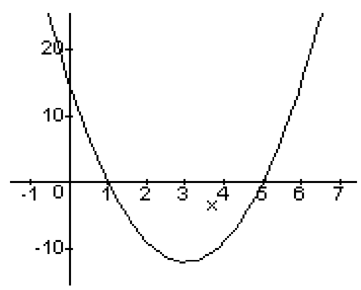


$x_1=1$ lok. max, $f(x_1)=16$; $x_2=5$ lok. min $f(x_2)=-16$.



az f függvény grafikonja

7.3. ábra



az f' függvény grafikonja

7.4. ábra

Könnyen látszik az is, hogy az f függvény második deriváltja

$$f'': \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f''(x) = 6x - 18$$

az $x_1 = 1$ helyen negatív értéket, az $x_2 = 5$ helyen pedig pozitív értéket vesz fel. Így a 7.25 tétel szerint is megállapíthatóak a függvény lokális szélsőértékhelyei.

7.3.2 Konvex és konkáv függvények

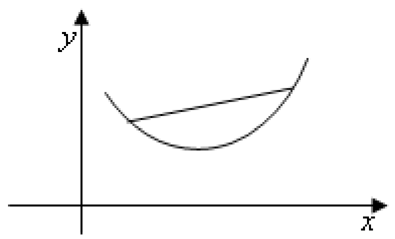
A függvény növekedése illetve csökkenése „kétféleképpen történhet” olyan értelemben, hogy a változás üteme lehet növekvő vagy csökkenő. Ennek jellemzésére alkalmazható a következő fogalom.

7.27 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt ***konvexnek (konkávnak)*** nevezzük, ha grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz nincs a grafikon alatt (felett).

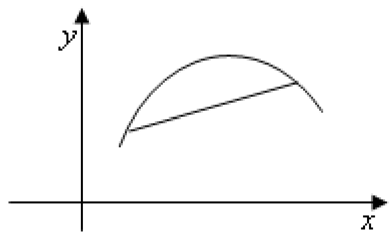
konvex függvény

konkáv függvény

A definíciót az alábbi két ábra szemlélteti.



7.4. ábra f konvex



7.5. ábra f konkáv

Nézzük a fenti definíció algebrai megfogalmazását. Az alábbi definíció megalapozottságát nem részletezzük, mindössze megemlítjük, hogy bármely $[a,b]$ intervallum x pontja a következőképpen írható fel:

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, \qquad \text{ahol } \lambda \in [0,1].$$

7.28 Definíció Az $f: D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvényt ***konvexnek (konkávnak)*** nevezzük értelmezési tartományának valamely I intervallumán, ha minden $x, y \in I$, $x \neq y$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

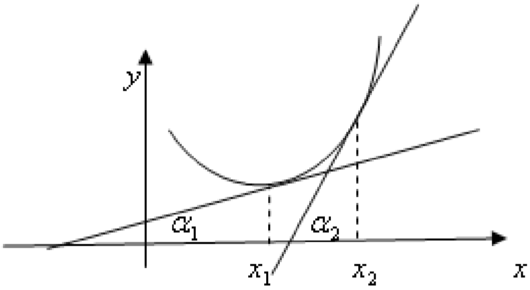
$$\left(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \right).$$

Ha e feltételben egyenlőség csak $\lambda = 0$ és $\lambda = 1$ esetén teljesül, akkor f szigorúan konvex (konkáv) az I intervallumon.

konvex függvény

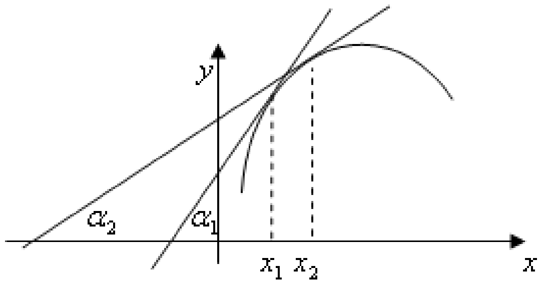
konkáv függvény

Differenciálható függvények esetén a konvex (konkáv) függvény grafikonja az érintési pontoktól eltekintve mindig az érintője felett (alatt) van. Ezt szemlélteti az alábbi két ábra.



$x_1 < x_2$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 < \mathrm{tg}\,\alpha_2$

7.6. ábra f konvex



$x_1 < x_2$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 > \mathrm{tg}\,\alpha_2$

7.7. ábra f konkáv

Észrevehetjük azt is, hogy konvex függvény esetén növekvő x_1 és x_2 abszcisszájú pontokba húzott érintők meredeksége – az érintők és az x tengely által alkotott α_1 és α_2 szögek nagysága – növekvő: $x_1 < x_2$ esetén $\alpha_1 < \alpha_2$. Ekkor viszont a tangens függvény szigorú monoton növekedése miatt $\mathrm{tg}\,\alpha_1 < \mathrm{tg}\,\alpha_2$. De $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = f'(x_1)$ és $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = f'(x_2)$. Következésképpen, minden x_1, x_2 és $x_1 < x_2$ esetén $f'(x_1) < f'(x_2)$. Ez azt jelenti, hogy f pontosan akkor konvex, ha f' növekvő. Hasonlóan kapjuk, hogy f pontosan akkor konkáv, ha f' csökkenő. Tulajdonképpen igazoltuk a következő állítást.

7.29 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely $I \subseteq D$ nyílt intervallumán differenciálható. Az f függvény az I intervallumon akkor és csak akkor (szigorúan) konvex, illetve konkáv, ha f' (szigorúan) monoton növekvő, illetve csökkenő.

Alkalmazzuk az $g = f'$ függvényre a 7.20 tételt. Legyen $g' = f''$ pozitív az I intervallumon. Ekkor $g = f'$ szigorúan monoton növekvő. Következésképpen – a 7.29 tétel alapján – f szigorúan konvex. Hasonló gondolatmenet fogalmazható meg konkáv függvény esetén. Az elmondottakat összefoglalva kapjuk a következőt.

7.30 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának $I \subseteq D$ nyílt intervallumán kétszer differenciálható.

Ha a függvény második deriváltja pozitív az I intervallumon, vagyis

$$f''(x_0) > 0 \text{ minden } x_0 \in I \text{ pontban,}$$

akkor a függvény szigorúan konvex ezen az intervallumon.

Ha a függvény második deriváltja negatív az I intervallumon, akkor a függvény szigorúan konkáv ezen az intervallumon.

konvexitás-konkávitás elégséges feltétele

Megjegyezzük, hogy a konvexitás és a konkávitás megfelelőjeként a konvexség és a konkávság megnevezések is használatosak. E tulajdonságokkal kapcsolatosan jellegzetes pontja a függvénynek az ún. inflexiós pont.

7.31 Definíció Az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény értelmezési tartományának x_0 belső pontját ***inflexiós pontnak*** nevezzük, ha létezik az x_0 pontot tartalmazó olyan $(a,b) \subseteq D$ intervallum, amelyre az $(a, x_0]$ intervallumon az f függvény konvex és az $[x_0, b)$ intervallumon konkáv, vagy fordítva – az $(a, x_0]$ intervallumon konkáv és az $[x_0, b)$ intervallumon konvex.

inflexiós pont

Ez azt jelenti, hogy az f grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintő ebben a pontban metszi a függvény grafikonját.

A konvexitás-konkávitás és az f' monotonitásának fentebb említett kapcsolatából a 7.24 tétel mintájára kapjuk a következőt.

7.32 Tétel Legyen az $f{:}D \to \mathbf{R}$ egyváltozós függvény az értelmezési tartományának valamely x_0 belső pontjában és annak valamely környezetében kétszer differenciálható. Ha

$$f''(x_0) = 0 \text{ és } f'' \text{ előjelet vált } x_0\text{-ban,}$$

akkor x_0 inflexiós pontja f-nek.

az inflexiós pont létezésének elégséges feltétele

Az elmondottak szemléltetésére folytassuk a 7.26 példában felírt függvénynek az ott elkezdett vizsgálatát.

7.33 Példa Határozzuk meg az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9$$

függvény konvex és konkáv intervallumait, illetve inflexiós pontját!

Először is felírjuk a függvény második deriváltját:

$$f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 15, \quad f'' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f''(x) = 6x - 18.$$

Könnyen látható, hogy a második derivált az $x_0 = 3$ helyen egyenlő nullával, amelytől balra negatív értékeket, míg jobbra pozitív értékeket vesz fel. Így a 7.30 tétel alapján f az $(-\infty, 3)$ intervallumon konkáv, és a $(3, +\infty)$ intervallumon konvex. A 7.31 tétel alapján kapjuk, hogy $x_0 = 3$ inflexiós pontja f-nek, és $f(x_0) = f(3) = 0$. A leírtakat nyomon követhetjük a 7.3 ábrán.

Mint a 7.26 példánál tettük, úgy most is elkészítjük az elmondottak rövid vázlatos összefoglalását.

$$f'' \;\; \underset{3}{\overset{- \qquad +}{\longrightarrow}}, \quad f \;\; \underset{3}{\overset{\cap \;\; \text{inf} \;\; \cup}{\longrightarrow}} \qquad x_0 = 3 \text{ infl.p. } f(3) = 0.$$

7.3.3 Teljes függvényvizsgálat

A közölt tételek segítségével megismerhetjük egy függvény sok jellemző tulajdonságát. Nézzük most ezeket részletesen.

Egy függvény részletesebb vizsgálata – a korábban már említett kérdéseket felidézve és azokon túlmenően – a következőket foglalja magában (teljes függvényvizsgálat):

1) a függvény nevezetes pontjainak – zérushelyeinek és szakadási helyeinek (póluspont, hézagpont) – meghatározása;
2) a függvény jeltartási intervallumainak meghatározása: hol pozitív és hol negatív a függvény;
3) a függvény viselkedése a nevezetes pontjainak a környezetében – előjelváltás, (jobb és bal oldali) határérték;
4) a függvény monotonitási intervallumainak meghatározása: hol növekvő és hol csökkenő a függvény;
5) a függvény lokális szélsőértékhelyeinek meghatározása;
6) a függvény konvex és konkáv intervallumainak meghatározása;
7) a függvény inflexiós pontjainak meghatározása;
8) annak vizsgálata, hogyan viselkedik a függvény a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben (létezik-e vízszintes és ferde aszimptotája, metszi-e a függvény grafikonja azokat);
9) a függvény értékkészletének meghatározása, annak eldöntése, hogy a függvény páros-e, páratlan-e, periodikus-e;
10) a függvény vázlatos grafikonjának elkészítése.

Az elmondottak szemléltetésére nézzük a következő példát.

7.34 Példa Végezzük el az alábbi függvény teljes vizsgálatát:

$$f:\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{3\left(x^2-4\right)(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}.$$

Haladjunk az elmondottak szerint lépésről-lépésre.

1. Lépés A függvény nevezetes pontjainak – zérushelyeinek és szakadási helyeinek (póluspont, hézagpont) – meghatározása. Könnyen látható, hogy

a számláló gyökei: $x=-2$, $x=-1$ és $x=2$;

a nevező gyökei: $x=-1$ és $x=1$ – kétszeres gyök.

A függvény nevezetes pontjai:

hézagpont (a számláló és a nevező közös gyökei, kezdjük mindig ezzel): $x=-1$,

póluspont (csak a nevező gyökei): $x=1$,

zérushely (csak a számláló gyökei): $x=-2$ és $x=2$.

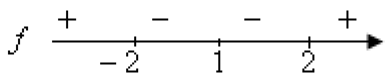
A hézagpont ismeretében lehet egyszerűsíteni – ezt mindig tegyük is meg! – és írjuk fel $f(x)$-et gyöktényezős alakban, majd a továbbiakban $f(x)$-nek az egyszerűsítés utáni alakját vizsgáljuk.

$$f(x)=\frac{3\left(x^2-4\right)(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{3(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{3\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}$$

2. Lépés A függvény jeltartási intervallumainak meghatározása. Ehhez a 3. fejezet 3.32 példájában már ismertetett eljárást alkalmazva kapjuk, hogy

f pozitív a $(-\infty,-2)$ és a $(2,+\infty)$ intervallumon,

f negatív a $(-2,1)$ és az $(1,2)$ intervallumon.



3. Lépés A függvény viselkedése a nevezetes pontjainak a környezetében. Először is kiszámítjuk a függvény határértékét az $x=-1$ hézagpontban.

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{3(-1-2)(-1+2)}{(-1-1)^2}=-\frac{9}{4}.$$

Az $x=-2$ zérushelyen a függvény értéke pozitívból negatívba megy át, tehát a grafikon fentről lefelé metszi az x tengelyt. A másik $x=2$ zérushelyen viszont – alulról felfelé, mivel itt az $f(x)$ negatív értékből pozitívba megy át.

Az $x=1$ póluspontban (ami csak a nevező gyöke) a függvénynek függőleges aszimptotája van, vagyis a függvény értékei e pont környezetében tartanak a $+\infty$-hez vagy a $-\infty$-hez. Az előjelet a 2. lépésben meghatározott jeltartási intervallum alapján olvassuk le. Az $x=1$ ponttól balra is és jobbra is negatív értéket vesz fel a függvény, ezért

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty \quad\text{és}\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty.$$

4. Lépés A függvény monotonitási intervallumainak meghatározása. Ehhez először felírjuk a függvény deriváltját.

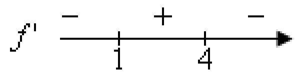
$$f':\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbf{R},\quad f'(x)=\left(3\frac{x^2-4}{(x-1)^2}\right)'=3\left(\frac{2x\cdot(x-1)^2-(x^2-4)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}\right)=$$

$$=3\left(\frac{2(x-1)\cdot(x^2-x-x^2+4))}{(x-1)^4}\right)=6\frac{4-x}{(x-1)^3}.$$

Most meghatározzuk a derivált zérushelyeit és jeltartási intervallumait:

f' pozitív az $(1,4)$ intervallumon,

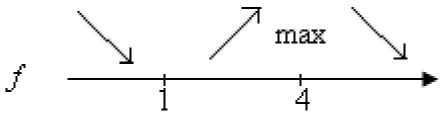
f' negatív a $(-\infty,1)$ és a $(4,+\infty)$ intervallumon.



Következésképpen a függvény az $(1,4)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, míg a $(-\infty,1)$ és a $(4,+\infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

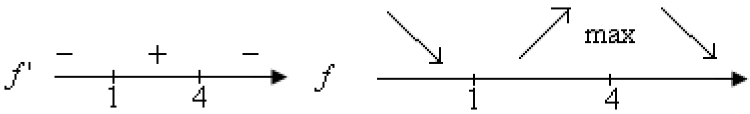
5. Lépés A függvény lokális szélsőértékhelyeinek meghatározása. Az előző lépésben végzett elemzésekből közvetlenül kapjuk, hogy

$x=4$ lokális maximumpont és $f(4)=\frac{3(4-2)(4+2)}{(4-1)^2}=\frac{36}{9}=4$.



Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $x=1$ nem lokális minimumpont, hiszen póluspont.

A 4. és 5. lépés összesített rövid vázlatos összefoglalása:



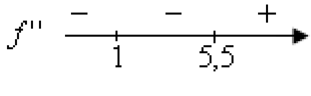
, $x=4$ lok. max. $f(4)=4$.

6. és 7. Lépés A függvény konvex és konkáv intervallumainak, valamint inflexiós pontjainak meghatározása. Ehhez megkeressük a második deriváltat:

$$f'':\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbf{R},\quad f''(x)=\left(6\frac{4-x}{(x-1)^3}\right)''=6\left(\frac{-1\cdot(x-1)^3-(4-x)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}\right)=$$

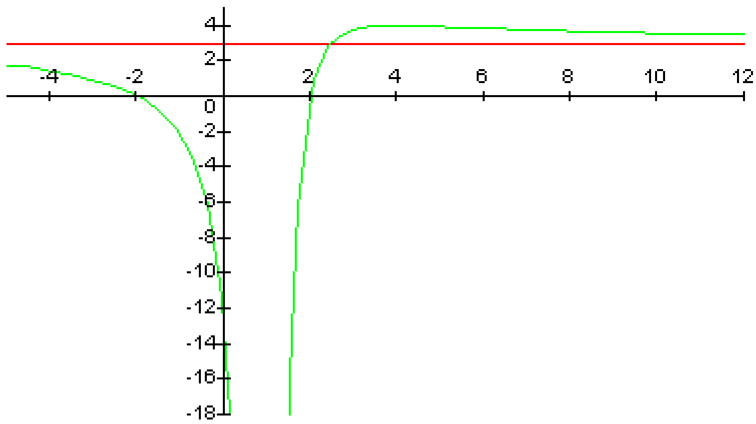
$$=6\left(\frac{(x-1)^2\cdot(-x+1-12+3x)}{(x-1)^6}\right)=6\frac{2x-11}{(x-1)^4}.$$

Könnyen látszik, hogy f'' az $x=1$ pontban nincs értelmezve, az $x=\frac{11}{2}=5{,}5$ pontban egyenlő nullával, tőle balra negatív értékeket, míg jobbra pozitív értékeket vesz fel.



Következésképpen f szigorúan konvex az $\left(\frac{11}{2},+\infty\right)$ intervallumon, míg szigorúan konkáv a a $(-\infty,1)$ és az $\left(1,\frac{11}{2}\right)$ intervallumon. Továbbá $x=\frac{11}{2}=5{,}5$ inflexiós pontja f-nek és $f\left(\frac{11}{2}\right)=\frac{35}{9}$.

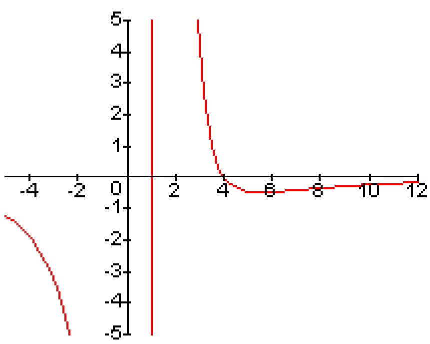
<u>8. Lépés</u> Hogyan viselkedik a függvény a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben? Könnyen látszik, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, következésképpen az $y=3$ egyenes a függvény vízszintes aszimptotája. Íme a függvény Mapple által készített grafikonja:



7.8. ábra

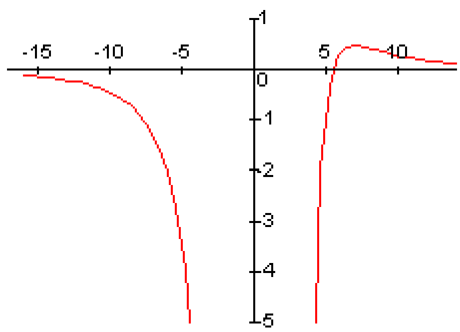
Az elmondottak alapján látszik az is, hogy a függvény értékkészlete: $(-\infty,4)$, továbbá f nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

Bár nem tartozik a megoldáshoz, de az érdekesség kedvéért az alábbi két ábrán vázoljuk az f' és az f'' függvény grafikonját.



f első deriváltjának grafikonja

7.9. ábra



f második deriváltjának grafikonja

7.10. ábra

Ellenőrző kérdések a 7. fejezethez

E.7.1 A függvény differenciálhányadosának definíciója.

E.7.2 A függvény differenciálhányadosának geometriai jelentése.

E.7.3 A függvény differenciálhányados függvényének a definíciója.

E.7.4 A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolatáról szóló tétel.

E.7.5 Az n-edik derivált definíciója.

E.7.6 Az n faktoriális definíciója.

E.7.7 Soroljuk fel az elemi függvények deriváltjait!

E.7.8 Az összeg differenciálhányadosának kiszámítása.

E.7.9 A szorzat differenciálhányadosának kiszámítása.

E.7.10 A hányados differenciálhányadosának kiszámítása.

E.7.11 Az összetett függvény differenciálhányadosának kiszámítása.

E.7.12 A függvény lokális növekedésének definíciója.

E.7.13 A függvény lokális csökkenésének definíciója.

E.7.14 A függvény monoton növekedésének elégséges feltétele.

E.7.15 A függvény monoton csökkenésének elégséges feltétele.

E.7.16 A függvény monoton növekedésének szükséges feltétele.

E.7.17 A függvény monoton csökkenésének szükséges feltétele.

E.7.18 A függvény lokális minimumhelye létezésének szükséges feltétele.

E.7.19 A függvény lokális maximumhelye létezésének szükséges feltétele.

E.7.20 A stacionárius pont definíciója.

E.7.21 A függvény lokális minimumhelye létezésének elégséges feltétele.

E.7.22 A függvény lokális maximumhelye létezésének elégséges feltétele.

E.7.23 A konvex függvény definíciója.

E.7.24 A konkáv függvény definíciója.

E.7.25 Az inflexiós pont definíciója.

E.7.26 A konvexitás elégséges feltétele.

E.7.27 A konkávitás elégséges feltétele.

E.7.28 Az inflexiós pont létezésének elégséges feltétele.

E.7.29 Soroljuk fel a teljes függvényvizsgálat lépéseit!

Gyakorló feladatok a 7. fejezethez

G.7.1 Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados-függvényét!

G.7.1.a) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 7\sin x + 9x^5 - 8e^x + 5\operatorname{ctg} x$

G.7.1.b) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3\cos x + 5\sqrt{x} - 6\cdot 3^x + 8\operatorname{tg} x$

G.7.1.c) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 9\ln x - \dfrac{8}{x^4} - 7\operatorname{ctg} x + 6\sin 5$

G.7.1.d) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\log_3 x + 3x - 4e^x - 5\operatorname{tg} x$

G.7.1.e) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = 6x^{100} + 9\cdot 5^x - 3\cdot\sqrt[4]{x} + 4\operatorname{ctg} 6$

G.7.1.f) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(5x^3 - 9\sin x\right)\cdot\left(4\sqrt[3]{x} + 6\log_5 x\right)$

G.7.1.g) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{3}{x^{10}} - 4\cos x\right)\cdot\left(99^x + 5\operatorname{tg} x\right)$

G.7.1.h) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(4\ln x - 5\cdot 8^x\right)\cdot\left(3\sin x + 7\log_3 x\right)$

G.7.1.i) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(8\operatorname{ctg} x - 7x\right)\cdot\left(6\sqrt[5]{x} + \dfrac{5}{x^7}\right)$

G.7.1.j) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(4x - 3\sin 2\right)\cdot\left(8\sqrt[7]{x^3} + 6\log_4 x\right)$

G.7.1.k) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{9x^3 - 4\cos x}{5e^x + 6\operatorname{tg} x}$ **G.7.1.l)** $f(x) = \dfrac{4\cdot 5^x - 7\sin x}{6\ln x + 3\operatorname{ctg} x}$

G.7.1.m) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{8\sqrt[9]{x^4} - \log_6 x}{5\cdot 7^x - 6\operatorname{ctg} x}$ **G.7.1.n)** $f(x) = \dfrac{3x^9 - 5\cdot 9^x}{x\sqrt{x} + 6\sin x}$

G.7.1.o) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin\left(3x^2 - 5x + 7\right)$

G.7.1.p) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^6\left(3x^2 - 5x + 7\right)$

G.7.1.q) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_4\left(\sin^6\left(3x^2 - 5x + 7\right)\right)$

G.7.1.r) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)$

G.7.1.s) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos^7\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)$

G.7.1.t) $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(\cos^7\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\right)$

G.7.2 Végezzük el az alábbi függvények teljes vizsgálatát!

G.7.2.a) f: **R** →**R**, $f(x)=\left(x^2-11x+28\right)\cdot(x+1)$

G.7.2.b) f: **R** →**R**, $f(x)=\left(x^2-9x+18\right)\cdot(x+2)$

G.7.2.c) f: **R** →**R**, $f(x)=\left(x^2-2x-15\right)\cdot(2-x)$

G.7.2.d) f: **R** →**R**, $f(x)=\left(x^2+7x+10\right)\cdot(3-x)$

G.7.2.e) f: **R** →**R**, $f(x)=3x^4-6x^3$

G.7.2.f) f: **R** →**R**, $f(x)=4x^2-x^4$

G.7.2.g) f:**R**\{-1; 1}→**R**, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

G.7.2.h) f: **R** →**R**, $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$

G.7.2.i) f: **R** →**R**, $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

G.7.2.j) f: **R** →**R**, $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$

G.7.2.k) f: **R** →**R**, $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

G.7.2.l) : **R** →**R**, $f(x)=e^{-x^2}$

G.7.2.m) f: **R**\{0} →**R**, $f(x)=x\ln\left(x^2\right)$

G.7.2.n) **R** →**R**, $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

G.7.2.o) f:**R**\{2}→**R**, $f(x)=\dfrac{5x^2-80}{(x-2)^2}$

G.7.2.p) f:**R**\{3}→**R**, $f(x)=\dfrac{5x^2-20}{(x-3)^2}$

G.7.2.q) f:**R**\{2}→**R**, $f(x)=\dfrac{5x-15}{(x-2)^3}$

G.7.2.r) f:**R**\{1}→**R**, $f(x)=\dfrac{10-5x}{(x-1)^2}$

G.7.2.s) f:**R**\{0}→**R**, $f(x)=10\dfrac{x^2-1}{x^3}$

G.7.2.t) f:**R**\{0}→**R**, $f(x)=10\dfrac{4-x^2}{x^3}$

G.7.2.u) f: **R**\{–1} → **R,** $f(x)=\dfrac{3x^2-21x+30}{x^2+2x+1}$

G.7.2.v) f: **R**\{–1} → **R,** $f(x)=\dfrac{2x^2+20x+42}{x^2+2x+1}$

G.7.2.w) f: **R**\{1} → **R,** $f(x)=\dfrac{4x^2+8x-60}{x^2-2x+1}$

8. Integrálszámítás

A függvény grafikonja adott pontbeli meredekségének geometriai vizsgálata a derivált fogalmához vezetett. Mint említettük, közgazdaságtanban nagyon fontos a deriváltnak az az értelmezése, amely a függvény változásának a gyorsaságával függ össze. A deriválttal nagyon szoros kapcsolatban lévő integrál fogalmának bevezetéséhez is leggyakrabban a geometriai értelmezést választják. Induljunk ki abból, hogy egy (nem csupán szakaszokkal határolt) síkidom területét szeretnénk meghatározni. Ehhez már az ókori görögök is azt a módszert alkalmazták, hogy az adott alakzatokhoz beírt és körülírt egyszerűbb geometriai alakzatokat (pl. háromszög, téglalap, sokszög) szerkesztettek, amelyek területét könnyen meg tudták mérni. Ha egyre kisebb a körülírt és a beírt alakzat területe közötti különbség, vagyis ez a két terület közelítőleg egyenlő egymással, akkor ez bizonyos pontossággal az adott síkidom területének tekinthető. A XVII. században jutott el a tudomány ahhoz, hogy ezt a problémát véglegesen megoldja, mégpedig a deriválás és az integrálás közötti szoros kapcsolat felfedezése által.

8.1 Határozatlan integrál (primitív függvény)

8.1 Definíció Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ egy intervallum vagy intervallumok egyesítése és $f, F : D \to \mathbf{R}$. Ha F differenciálható és deriváltja az f függvény, akkor F-et az f (D halmaz feletti) ***primitív függvényének*** vagy ***határozatlan integráljának*** nevezzük Jele: $\int f$ vagy $\int f(x)dx$.

primitív függvény

határozatlan integrál

8.2 Példa Nevezzük meg az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^3$ függvény primitív függvényét!

Egy olyan F függvényt kell keresnünk, amelynek deriváltja *f*. Szerencsénk van, könnyen látszik ugyanis, hogy az

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ F(x) = x^4$$

függvény deriváltja az adott f függvény, tehát az f függvény egy primitív függvényét megneveztük. Könnyen észrevehető, hogy pl. a $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = x^4 + 5$ függvény is primitív függvénye *f*-nek. A két megnevezett primitív függvénye *f*-nek annyiban tér el egymástól, hogy különbségük konstans függvény. Ez általános esetben is így van.

8.3 Tétel Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ egy intervallum vagy intervallumok egyesítése és $f, F : D \to \mathbf{R}$. Ha F primitív függvénye *f*-nek, akkor minden $C \in \mathbf{R}$ esetén az $F + C$ függvény is primitív függvénye *f*-nek. Jelben: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

primitív függvény

határozatlan integrál

Az előző példára feleletünket tehát így is megadhatjuk:

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C, \text{ ahol } C \in \mathbf{R}.$$

Meg kell jegyezni, hogy az $\int f(x)dx$ jelölésben a $\int$ szimbólum az ***integráljel***, az $f(x)$ az ***integrandus*** és a dx azt jelöli, hogy az integrandus változója *x*.

A határozatlan integrál definíciójából közvetlenül következik, hogy az integrál deriváltja megegyezik az integrandussal:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

sőt

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy jegyzetünkben a primitív függvény és a határozatlan integrál egy és ugyanannak a fogalomnak két különböző elnevezése. Úgy is mondhattuk volna, hogy az f függvény bármely primitív függvényét az f határozatlan integráljának nevezzük. Egyes jegyzetekben a függvény határozatlan integrálja alatt a primitív függvények összességét értik, ez az értelmezés azonban egyes esetekben bonyodalmakhoz vezethet (lásd például a parciális integrálás tételét).

Az alábbi határozatlan integrálokat, amelyeket a definíció alapján könnyen ellenőrizhetünk, alapintegráloknak szokás nevezni.

alap-integrálok

8.4 Tétel

(1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \in \mathbf{N}, D_f = \mathbf{R}, C \in \mathbf{R}).$

(2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq -1,\ D_f = \mathbf{R}^+,\ C \in \mathbf{R}).$

(3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad (D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\},\ C \in \mathbf{R}).$

(4) $\int e^x dx = e^x + C \qquad (D_f = \mathbf{R},\ C \in \mathbf{R}).$

(5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a \in \mathbf{R}^+,\ a \neq 1,\ D_f = \mathbf{R},\ C \in \mathbf{R}).$

(6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad (D_f = \mathbf{R}, C \in \mathbf{R}).$

(7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad (D_f = \mathbf{R}, C \in \mathbf{R}).$

(8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \qquad (D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}, C \in \mathbf{R}).$

(9) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \left(D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\},\ C \in \mathbf{R}\right).$

A tételben D_f a szóban forgó primitív függvény értelmezési tartományát jelöli.

Általában „nincs olyan szerencsénk”, hogy alapintegrálokat kelljen meghatároznunk. Megemlítjük azt is, hogy nincsen olyan eljárás, amellyel egy tetszőleges függvénynek meg tudnánk adni a primitív függvényét. Sőt bizonyított tény, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek nem is létezik – elemi függvények segítségével kifejezhető – primitív függvénye. Ilyen például az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ függvény.

Függvények határozatlan integráljainak előállításához nyújtanak segítséget az alábbi tételek, amelyeknek helyessége deriválással könnyen ellenőrizhető.

8.5 Tétel Legyen $D\subseteq\mathbf{R}$ egy intervallum és $f,g:D\to\mathbf{R}$. Ha f-nek és g-nek létezik primitív függvénye, akkor a cf (ahol $c\in\mathbf{R}$) és az $f+g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és

(a) $\int cf = c\int f$,

(b) $\int (f+g)=\int f+\int g$,

vagy – részletesebben felírva:

(a’) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$,

(b’) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

integrálási szabályok

8.6 Példa

$$\int\left(5x^3+7\cos x\right)dx=\int 5x^3dx+\int 7\cos x\,dx=5\int x^3dx+7\int\cos x\,dx=5\frac{x^4}{4}+7\sin x+C\,.$$

8.7 Tétel Legyen A és B valós intervallum. Ha az $f:A\to\mathbf{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, és $g:B\to A$ egy differenciálható függvény, akkor az $(f\circ g)g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, továbbá van olyan $C\in\mathbf{R}$, hogy minden $x\in B$ esetén

$$\int (f\circ g)(x)\cdot g'(x)dx=F(g(x))+C\,,$$

ahol F az f primitív függvénye.

helyettesítéssel való integrálás

$\int (f\circ g)g'=F\circ g$

8.8 Példa

$$\int(\sin x)^3\cos x\,dx=\frac{\sin^4 x}{4}+C\,.$$

8.9 Tétel Legyen I valós intervallum, $f:I\to\mathbf{R}$ és $g:I\to\mathbf{R}$

parciális integrálás $\int fg' = fg - \int f'g$	differenciálható függvények, továbbá f' és g' folytonos. Ha az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $f\,g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, továbbá van olyan $C \in \mathbf{R}$, hogy minden $x \in I$ esetén $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C$.

Az utóbbi két tételt integrálási módszereknek szokás nevezni. A parciális integrálás módszerét leginkább akkor szokás alkalmazni, ha két olyan függvény szorzatáról van szó, ahol az egyik egy polinom, a másik az exponenciális, a szinusz vagy a koszinusz függvény. Ilyenkor az $\int fg' = fg - \int f'g$ képletben a polinomot kell f-nek és a másik függvényt g'-nek választani.

8.10 Példa Számítsuk ki az $\int x\cos x\,dx$ határozatlan integrált!

A 8.9 tétel jelöléseit alkalmazva legyen $f = x$ és $g' = \cos x$. Ekkor $f' = 1$ és $g = \sin x$, továbbá

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C\,.$$

8.2 Határozott integrál

Legyen $f:[a,b] \to \mathrm{R}^+$ egy korlátos függvény. Határozzuk meg az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ és $y = f(x)$ görbék által alkotott ún. görbevonalú trapéz területét (8.1 ábra).

Ehhez az $[a,b]$ intervallumot osszuk fel n részre. Az

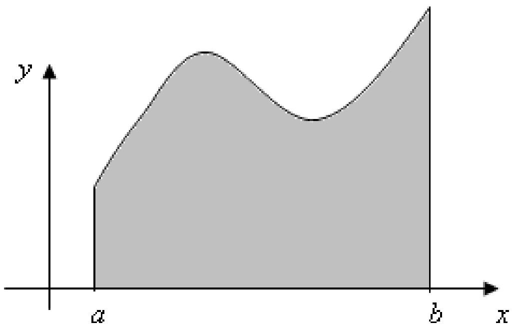
$$\{\, a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b \mid x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \,\}$$

halmazt az $[a,b]$ intervallum felosztásának, a részintervallumok hosszának maximumát pedig a felosztás finomságának nevezzük. Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumból válasszunk ki egy tetszőleges $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontot és közelítsük a keresett területet a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ alapú és $f(\xi_i)$ magasságú téglalapok területeinek összegével, ahol $i = 1, 2, \cdots, n$ (8.2 ábra).

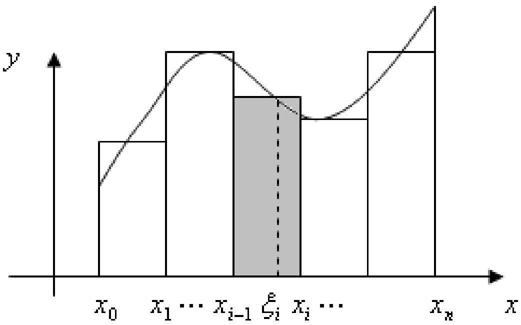
A keresett terület tehát megközelítőleg egyenlő

$$T \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Nyílván minél kisebb a felosztás finomsága, annál pontosabb a közelítés.



8.1 ábra



8.2 ábra

8.11 Definíció Legyen $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ korlátos függvény, { $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ } az $[a,b]$ intervallum felosz-tása, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\delta = \max\limits_i \Delta x_i$ a felosztás finomsága és $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1,2,\cdots,n$). Az f függvényt az $[a,b]$ intervallumon ***(Riemann-)integrálhatónak*** nevezzük, ha minden nullához konvergáló finomságú felosztás-sorozathoz tartozó minden

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

integrálközelítő összegekből álló sorozat konvergens. Ekkor ezek határértéke egyenlő, és ezt a határértéket az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett ***határozott integráljának*** vagy ***Riemann-integráljának*** nevezzük. Jele: $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)dx$.

integrálható függvény

határozott integrál

$\int\limits_a^b f(x)dx$

Geometriai jelentése: az $\int\limits_a^b f(x)dx$ határozott integrál az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ és $y = f(x)$ görbék által alkotott ún. görbevonalú trapéz területe, amennyiben f nemnegatív.

A következőkben egy eljárást mutatunk a határozott integrál közvetlen kiszámítására. Ehhez szükségünk van néhány definícióra.

8.12 Definíció

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

integrál-függvény

8.13 Definíció Legyen $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ integrálható függvény. A

$$G:[a,b]\to\mathbf{R},\ G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

függvényt az f függvény ***integrálfüggvényének*** nevezzük.

Könnyen látszik, hogy

$$G(a)=0 \quad \text{és} \quad G(b)=\int_a^b f(x)dx,$$

továbbá igazolható az alábbi állítás.

8.14 Tétel Legyen $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ integrálható függvény és G az f integrálfüggvénye. Ekkor

$$G'(x)=f(x)$$

minden olyan $x\in[a,b]$ pontban, ahol f folytonos.

Tehát a G integrálfüggvény az f függvény primitív függvénye. Legyen F egy másik (tetszőleges) primitív függvénye *f*-nek. Ekkor a 8.3 tétel értelmében létezik olyan $C\in\mathbf{R}$, hogy

$$G(x)=F(x)+C$$

minden $x\in[a,b]$ esetén. Innen és a $G(a)=0$ egyenletből kapjuk, hogy $C=-F(a)$ továbbá

$$G(b)=F(b)+C=F(b)-F(a).$$

Mivel $G(b)=\int_a^b f(x)dx$, így tulajdonképpen igazoltuk az alábbi állítást.

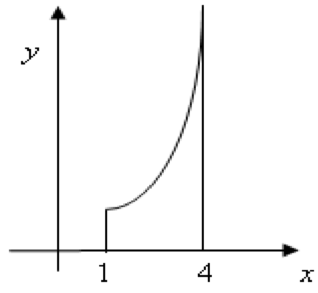
Newton–Leibniz-formula

8.15 Tétel Legyen $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ integrálható függvény és F tetszőleges primitív függvénye *f*-nek. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b.$$

8.16 Példa Számítsuk ki az $x=1$, $x=4$, $y=0$ és az $y=x^2$ görbék által alkotott alakzat területét (8.3 ábra)!

$$T=\int_1^4 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4=\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{63}{3}=21 \text{ (négyzetegység).}$$



8.3 ábra

A definícióból közvetlenül következik az alábbi állítás.

8.17Tétel

a határozott integrál tulajdonságai

(1) $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

(2) $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$.

Az integrálhatóság fogalmát zárt intervallumon értelmezett, korlátos függvényekre definiáltuk. A következőkben kiterjesztjük az integrál fogalmát olyan függvényekre, amelyek értelmezési tartománya félig nyílt vagy nyílt intervallum, és nem feltétlenül korlátosak. Így jutunk el az improprius integrál fogalmához.

8.3 Improprius integrál

8.18 Definíció Legyen $f:[a,b)\to\mathbf{R}$, ahol $-\infty<a<b\le+\infty$. Tegyük fel, hogy minden $c\in(a,b)$ esetén f integrálható az $[a,c]$ intervallumon. Legyen továbbá

$$F:[a,b)\to\mathbf{R},\quad F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

improprius integrál

(1) Ha az F függvénynek b-ben létezik határértéke, akkor ezt az A számot az f ***improprius integráljának*** nevezzük, és azt mondjuk, hogy az ***improprius integrál konvergens.***

$$\text{Jelben: }\int_a^b f=\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt=A.$$

(2) Ha az F függvénynek b-ben nem létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ ***improprius integrál divergens.***

Ha az F függvény határértéke b-ben $+\infty$ vagy $-\infty$, akkor ezt

$$\int_a^b f=\int_a^b f(x)dx=+\infty,\ \text{illetve}\ \int_a^b f=\int_a^b f(x)dx=-\infty$$

módon jelöljük.

Értelemszerűen definiálható a többi improprius integrál is az $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ függvényre, ahol $-\infty\le a<b\le+\infty$.

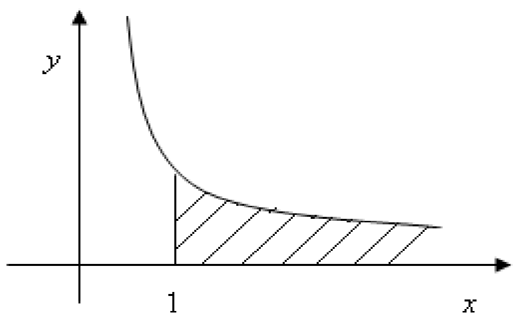
8.19 Példa Számítsuk ki az $x=1$, $y=0$ és az $y=\dfrac{1}{x^2}$ görbék által alkotott alakzat területét (8.4 ábra)!

Legyen $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Ekkor a keresett terület egyenlő

$$T=\int_1^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2}dt=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1.$$



8.4 ábra

Ellenőrző kérdések a 8. fejezethez

E.8.1 A függvény primitív függvényének definíciója.
E.8.2 A függvény határozatlan integráljának definíciója.
E.8.3 Soroljuk fel az alapintegrálokat!
E.8.4 Fogalmazzuk meg az integrálási szabályokat!
E.8.5 Fogalmazzuk meg a helyettesítéssel való integrálás tételét!
E.8.6 Fogalmazzuk meg a parciális integrálás tételét!
E.8.7 A függvény határozott integráljának definíciója.
E.8.8 A függvény határozott integráljának geometriai jelentése.
E.8.9 Fogalmazzuk meg a Newton–Leibniz-formulát!
E.8.10 Soroljuk fel a határozott integrál tulajdonságait!
E.8.11 Az improprius integrál definíciója.

Gyakorló feladatok a 8. fejezethez

G.8.1 Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

G.8.1.a) $\int\left(3\cos x-7x^3+9\right)dx$

G.8.1.b) $\int\left(4\sin x-5\sqrt{x}+\frac{6}{\cos^2 x}\right)dx$

G.8.1.c) $\int\left(7\cdot 5^x-5x^7+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

G.8.1.d) $\int\left(8\cdot e^x-\frac{7}{x^3}+\frac{6}{x}-\cos 3\right)dx$

G.8.1.e) $\int\left(2\cdot x^{10}-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}-6\cos x\right)dx$

G.8.1.f) $\int\left(\frac{3x^4-4x^2+5x-7}{9x^2}\right)dx$

G.8.1.g) $\int\left(3\cdot e^x-4x^e-6+\frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$

G.8.1.h) $\int\left(9\cdot\sin x-7\cdot\sqrt[8]{x^3}-5\cdot 3^x\right)dx$

G.8.1.i) $\int\left(3\cdot\cos(5x-2)+4\cdot(7x+6)^2\right)dx$

G.8.1.j) $\int\left(7\cdot\sin(3x+4)+\frac{5}{6x-9}\right)dx$

G.8.1.k) $\int\left(3\cdot 5^{2x+4}-\frac{6}{\cos^2(7x+8)}\right)dx$

G.8.1.l) $\int\left(3\cdot(4x+5)^{10}-\frac{7}{\sin^2(9x-4)}\right)dx$

G.8.1.m) $\int\left((10x-2)\cdot\cos(5x^2-2x+3)\right)dx$

G.8.1.n) $\int\left(\frac{24x^2-20x+6}{4x^3-5x^2+3x-2}\right)dx$

G.8.1.o) $\int\left(\frac{18x^2-6x+62}{x-3}\right)dx$

G.8.1.p) $\int\left(\frac{9x^3-6x^2+3x+5}{3x-2}\right)dx$

G.8.1.q) $\int\left(\frac{12x^3-8x^2+6x-4}{2x+4}\right)dx$

G.8.1.r) $\int\left(\frac{9x^3-5x^2+7x-6}{x-3}\right)dx$

G.8.1.s) $\int\left((7x-5)\cdot\sin(3x-4)\right)dx$

G.8.1.t) $\int\left((18x+6)\cdot\sin(3x+7)\right)dx$

G.8.1.u) $\int\left((25x-15)\cdot\sin(5x+2)\right)dx$

G.8.1.v) $\int\left((3x-4)\cdot\sin(7x+9)\right)dx$

G.8.1.w) $\int\left((5x+9)\cdot\cos(7x+4)\right)dx$

G.8.1.x) $\int\left((9x-6)\cdot\cos(3x-5)\right)dx$

G.8.1.y) $\int\left((8x-7)\cdot\cos(5x-6)\right)dx$

G.8.1.z) $\int\left((12x-10)\cdot\cos(2x+7)\right)dx$

G.8.2.a) $\int\left((7x-5)\cdot e^{3x+2}\right)dx$

G.8.2.b) $\int\left((12x-8)\cdot e^{2x-5}\right)dx$

G.8.2.c) $\int\left((12x+6)\cdot 2^{x}\right)dx$

G.8.2.d) $\int\left((5x+7)\cdot 3^{x}\right)dx$

G.8.2.e) $\int\left((5x+7)\cdot\ln(3x+2)\right)dx$

G.8.2.f) $\int\left((18x+6)\cdot\ln(3x-5)\right)dx$

G.8.2.g) $\int\left((2x+3)\cdot\ln(5x-7)\right)dx$

G.8.2.h) $\int\left((7x-4)\cdot\ln(3x+5)\right)dx$

G.8.2.i) $\int\left((7x^2-4x+3)\cdot\sin(3x+5)\right)dx$

G.8.2.j) $\int\left((9x^2-6x+5)\cdot\sin(3x-2)\right)dx$

G.8.2.k) $\int\left((6x^2-4x+3)\cdot\sin(2x+7)\right)dx$

G.8.2.l) $\int\left((25x^2-15x+7)\cdot\sin(5x-3)\right)dx$

G.8.2.m) $\int\left((3x^2-4x+2)\cdot\cos(5x-4)\right)dx$

G.8.2.n) $\int\left((12x^2-9x+5)\cdot\cos(3x+5)\right)dx$

G.8.2.o) $\int\left((x^2+2x+4)\cdot\cos(5x+3)\right)dx$

G.8.2.p) $\int\left((24x^2+12x+8)\cdot\cos(2x-7)\right)dx$

G.8.2.q) $\int\left((5x^2+7x+3)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.r) $\int\left((9x^2+5x-2)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.s) $\int\left((3x^2-7x+8)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.t) $\int\left((13x^2-17x+11)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.u) $\int\left((7x^3+5x^2+3x+2)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.v) $\int\left((8x^3-6x^2+4x-7)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.w) $\int\left((11x^3+13x^2+17x+19)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.2.x) $\int\left((6x^3-5x^2+9x-4)\cdot e^{x}\right)dx$

G.8.3 Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

G.8.3.a) $\int_1^5 \left(6x^2 - 8x + 9 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx$

G.8.3.b) $\int_1^5 \left(15x^2 - 4x - 3 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}\right)dx$

G.8.3.c) $\int_2^5 \left(12x^2 + 6x - 5 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}\right)dx$

G.8.3.d) $\int_2^5 \left(9x^2 + 10x + 7 + \frac{13}{x} + \frac{20}{x^2}\right)dx$

G.8.3.e) $\int_2^5 \left(10x^4 + 12x^2 - 17 + \frac{13}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx$

G.8.3.f) $\int_1^7 \left(9x^2 + 6x - 17 + \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2}\right)dx$

G.8.3.g) $\int_1^7 \left(6x^2 + 2x - 7 + \frac{8}{x} + \frac{14}{x^2}\right)dx$

G.8.3.h) $\int_1^7 \left(12x^2 + 4x - 5 + \frac{3}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{49}{x^3}\right)dx$

G.8.3.i) $\int_1^4 \left(6x^2 - 4x + 12\sqrt{x} + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx$

G.8.3.j) $\int_1^4 \left(15x^2 - 16x + 9\sqrt{x} - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)dx$

G.8.4 Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

G.8.4.a) $\int \frac{8x-5}{6x-9}dx$

G.8.4.b) $\int \frac{2x+5}{6x+7}dx$

G.8.4.c) $\int \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x - 3}{x+4}dx$

G.8.4.d) $\int \frac{5x^3 + 5x^2 + 8x - 7}{x-6}dx$

G.8.4.e) $\int (2x+9)\sin(3x+6)dx$

G.8.4.f) $\int (9x+5)\sin(8x-6)dx$

G.8.4.g) $\int \sin(9x-4)e^{8x+2}dx$

G.8.4.h) $\int \sin(7x+4)e^{9x+8}dx$

G.8.4.i) $\int_1^5 \left(6x^2 - 6x + 4 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)dx$

G.8.4.j) $\int_1^4 \left(9x^2 + 3x + 3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$

Minta vizsgadolgozatok

1. Vizsgadolgozat

1) (6 pont) a) Legyen f:**R**→**R**, $f(x)=\dfrac{\sin 8x+\log_7\left(x^2+3\right)}{2+\cos 4+e^{x+3}+\sqrt{x^2+3}}\cdot$ $f'(x)$ = ?

b) Legyen g:(0; + ∞) x (-∞; +∞) → **R**, $g(x,y)=x^y\cdot\sqrt[4]{4+\cos(2x+7y)}\cdot$

$g'_y(x,y)$ =?

2) (4 pont) 2000 január elején először, aztán minden év január elején betettünk a takarékba 25.000.- Ft-ot, utoljára 2004-ben. Mekkora értékű TV-készüléket vásárolhatunk 2005 január elején, ha ekkor a takarékban összegyűjtött pénzünkhöz még akkora kölcsönt is felvehetünk, amelyet minden év januárjában – egyenlő – 20000 Ft-os részletekben törlesztünk majd vissza, először 2006-ban, utoljára 2010-ben? A kamatláb az első öt évben évi 10%, továbbiakban évi 25%.

3) (8 pont) Végezzük el az alábbi sorozat teljes vizsgálatát (monotonitás, korlátosság, konvergencia stb.), konvergencia esetén az ε=0,01-hoz keressünk küszöbszámot!

$\langle a_n\rangle$: **N**→**R**, $a_n=\dfrac{8n}{2n+n^2+1}$ $\langle b_n\rangle$:**N** →**R**, $b_n=(-1)^n\dfrac{8n}{2n+n^2+1}$

4) (10 pont) Végezzük el az alábbi függvény teljes vizsgálatát!

$$f:\mathbf{R}\setminus\{-2;2\}\to\mathbf{R},\qquad f(x)=\frac{x^2-2x}{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4x+4\right)}.$$

5) (7 pont) Számítsuk ki a következő határértékeket:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n-3};\quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-4x\right)\cdot\sin(2x)}{x^3-6x^2};$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{tg(x^2+6x)}{\sin(3x)}$$

6) (5 pont) $\displaystyle\int_1^5\left(7e^x-6x+4-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx$ =?

2. Vizsgadolgozat

1. (4 pont) Határozzuk meg az alábbi függvény differenciálhányadosát tetszőleges $x \in D$ esetén, ahol D az **R** lehető legbővebb részhalmaza.

$$f: D \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \left(3 - \cos^3 x\right)^4 + \frac{6^x \, ctgx^3}{\sqrt[5]{\ln x + \cos 5 + x^4}}.$$

2. (9 pont) Végezzük el az alábbi sorozatok teljes vizsgálatát (monotonitás, korlátosság, konvergencia stb.) konvergencia esetén az ε = 0,01-hoz keresünk küszöbszámot!

a) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}, \quad a_n = (-1)^n \dfrac{9n+4}{3n+2};$ b) $\langle b_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}, \; b_n = (-1)^n \dfrac{9n+4}{3n^2+2}$

3. (9 pont) Végezzük el az alábbi függvény teljes vizsgálatát!

$$f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = 2\frac{x^3-1}{(x-1)^2}.$$

4. (6 pont) Az *A, B* és *C* paraméterek alkalmas választásával adjuk meg az **R** azon legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvény folytonos!

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-2x-8)\sin 4x}{x(x^2-4)} & x \neq \{-2,0,2\} \\ A & x = -2 \\ B & x = 0 \\ C & x = 2 \end{cases}$$

5. (4 pont) Az év elején elhelyeztünk a takarékba 300 000 Ft-ot évi 24%-os kamatláb mellett.
   a. Mennyi pénzünk lesz a 10. év végén?
   b. Mennyi pénzünk lesz a 10. év végén ha a tőkésítés havonta (a 24%-nak megfelelően azonos kamatlábbal) történik?
   c. Mennyi pénzünk lesz a 10. év végén folytonos kamatozást feltételezve?

6. (5 pont) Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n-2}\right)^{2n+3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{6^n-8^n+6\cdot 9^n}{7^n+3^{2n+1}-6^n}}$

7. (3 pont) a) Vázoljuk az f: **R**→**R**, $f(x) = x|3-x|$ függvény grafikonját! Határozzuk meg az f függvény [–1; 4] intervallumon felvett legkisebb és legnagyobb értékét!

3. Vizsgadolgozat

1. (4 pont) Határozzuk meg az alábbi függvény differenciálhányadosát tetszőleges $x \in D_f$ esetén, ahol D az **R** lehető legbővebb részhalmaza.

$$f: D \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{3+5^{x^3}} + \log_5(4+\sin x)}{tgx^3 + \cos 5}.$$

2. (9 pont) Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat, konvergencia esetén az ε = 0,01-hoz keressünk küszöbszámot!

a) $\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ a_n = \dfrac{3n+2}{n^2+5}$; b) $\langle b_{n:} \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ b_n = (-1)^n \dfrac{3n^2+2}{n^2+5}$.

3. (10 pont) Vázoljuk az alábbi függvény grafikonját, határozzuk meg a lokális szélsőértékhelyeit és a monotonitási intervallumait. Metszi-e a függvény grafikonja valamelyik aszimptotáját?

$$f : \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{(x^2-4)(x-2)}{x^3+2x^2}.$$

4. (9 pont) Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{3-4n}\right)^{2n+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(2x+1)+tg5x}{x^2+3x}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9\cdot 8^n - 5\cdot 6^n}{5^n - 2^{3n+1}}$.

5. (4 pont) 2003. január elején évi 25%-os kamatra helyeztük el pénzünket. Mekkorára növekedett pénzünk vásárlóértéke 2009. december végére, ha a 2003-2005 években 7%-os , a 2006-2009 években 5%-os az infláció?

6. (4 pont) Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait!

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \qquad f(x;y) = 4x^2 - xy + 3y^2.$$

7. (10 pont) a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int_1^3\int_0^2 (12x^2y^3 + 6y - \frac{5}{x})\,dydx = ?$

4. Vizsgadolgozat

1. (8 pont) Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat, konvergencia esetén az ε = 0,01-hoz keressünk küszöbszámot!

$$\langle a_n \rangle : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}, \quad a_n = \frac{8n^2+3}{2n^2-9};$$

$$\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \qquad b_n = 1 - \frac{8}{7} + \left(\frac{8}{7}\right)^2 - \left(\frac{8}{7}\right)^3 + \dots\dots + (-1)^n \left(\frac{8}{7}\right)^n \cdot$$

2. (7 pont) Az A, B és C paraméterek alkalmas választásával adjuk meg az **R** azon legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvény folytonos !

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\sin 6x}{x^3-4x} & x \neq \{-2,0,2\} \\ A & x=-2 \\ B & x=0 \\ C & x=2 \end{cases}$$

3. (4 pont) Beruházunk öt éven át év elején évente 3 millió Ft-ot. A negyedik évtől kezdve hat éven át 5-5 millió Ft hozadékkal számolhatunk. A kamatláb az említett időszakban évi 11%. Gazdaságos-e a beruházás, ha igen hányszor térül meg a befektetett összegünk?

4. (8 pont) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot: f : **R** → **R**, $f(x) = \ln(x^2+1)$.

5. (5 pont) Határozzuk meg az alábbi f függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait:

$$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0;\,0)\} \to \mathbf{R}, \qquad\qquad f(x;y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y} \cdot$$

6. (4 pont) Írjuk fel az f: **R** →**R**, $f(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+e^3}}{\log_3\left(x^4+5^x+4\right)}$ függvény derivált függvényét!

7. (4 pont) Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{8-5n}\right)^{2n+5}$ határértéket!

Megoldások

Az 1. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

G.1.1	a) Igaz	b)	Hamis	c) Hamis	d)	Igaz
	e) Igaz	f)	Hamis	g) Igaz	h)	Hamis

G.1.2

a) A félév végi aláírást akkor és csak akkor szerezzük meg, ha teljesítettük a zárthelyi dolgozatot és a házi feladatot.

b) A zárthelyi dolgozat és a házi feladat teljesítése az aláírás megszerzésének elégséges feltétele.

c) Ha nem szereztük meg az aláírást, akkor a zárthelyi dolgozatot vagy a házi feladatot nem teljesítettük.

d) A zárthelyi dolgozat és a házi feladat nem teljesítése azt jelenti, hogy nem teljesítettük a zárthelyi dolgozatot vagy nem teljesítettük a házi feladatot.

e) Ha sikeres a vizsgánk, akkor megszereztük a kreditpontot (a sikeres vizsga a kreditpont megszerzésének elégséges feltétele)

f) Ha nem szereztük meg a félév végi aláírást, nem mehetünk vizsgázni.

g) Ha nem szereztük meg a kreditpontot, akkor nem vizsgáztunk sikeresen.

h) Ha nem teljesítjük a zárthelyi dolgozatot, akkor nem szerezzük meg a kreditpontot.

i) Ha nem teljesítjük a házi feladatot, akkor nem szerezzük meg a kreditpontot.

G.1.3	a) Igaz	b) Igaz	c) Igaz	d) Hamis	e) Igaz

G.1.4	a) Igaz	b) Igaz	c) Igaz	d) Hamis	e) Igaz
	f) Igaz	g) Igaz	h) Igaz	i) Hamis	j) Igaz

G.1.5 a) Hamis. Tagadása az igaz: Létezik olyan valós szám (a nulla), amelynek négyzete nem pozitív, hanem nulla.

b) Hamis. Tagadása: létezik olyan y valós szám, hogy minden x valós számra $y \le x^2$.

c) Igaz. Tagadása: létezik olyan y pozitív valós szám, hogy minden x esetén $x^2 > y$.

Az 2. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

G.2.1 a) Alulról és felülről is korlátos, pontos alsó korlátja 2; pontos felső korlátja 97; legkisebb eleme 2; legnagyobb eleme 97.

b) Alulról korlátos, felülről nem korlátos; pontos alsó korlátja 2; legkisebb eleme 2; pontos felső korlátja nem létezik, tehát legnagyobb eleme sem létezik.

c) Alulról és felülről is korlátos; pontos alsó korlátja 3; pontos felső korlátja 10; legkisebb eleme nem létezik, legnagyobb eleme 10.

d) Alulról és felülről is korlátos; pontos alsó korlátja 1; pontos felső korlátja 3; legkisebb eleme 1; legnagyobb eleme nem létezik.

e) Alulról és felülről is korlátos; pontos alsó korlátja és legkisebb eleme 1,8; pontos felső korlátja és legnagyobb eleme 0,68.

G.2.2 a) $(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$

b) $[-6,4]$

c) $\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right)\cup\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

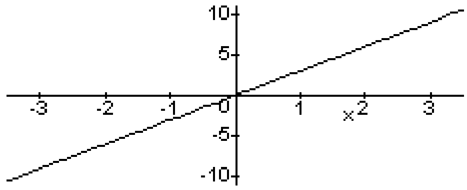
d) $\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right)\cup[9,+\infty)$

e) $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]\cup(3,+\infty)$

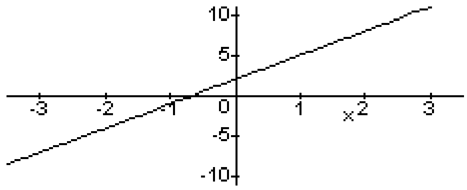
f) $(-6,3]\cup(4,5]$

A 3. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

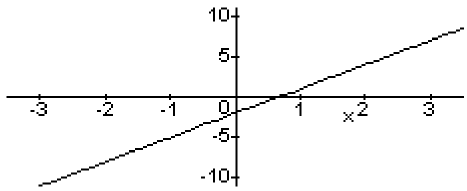
G.3.1.a) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$



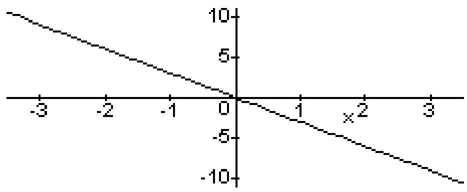
G.3.1.b) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$



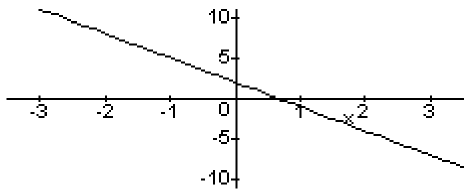
G.3.1.c) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$



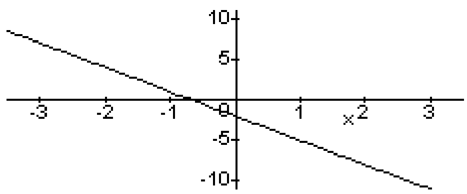
G.3.1.d) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x$



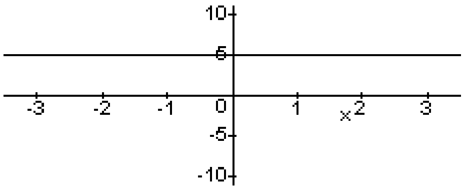
G.3.1.e) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x + 2$



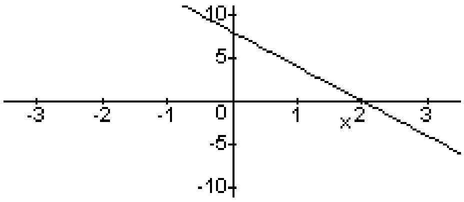
G.3.1.f) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x - 2$



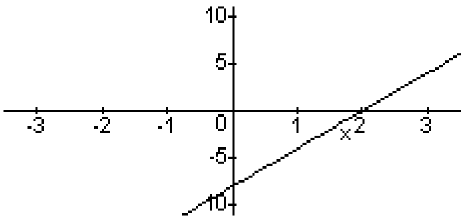
G.3.1.g) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5$



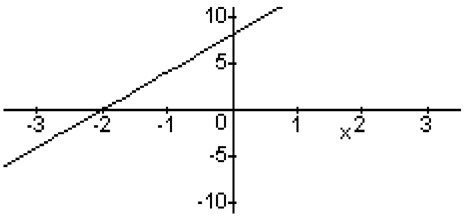
G.3.1.h) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 8 - 4x$



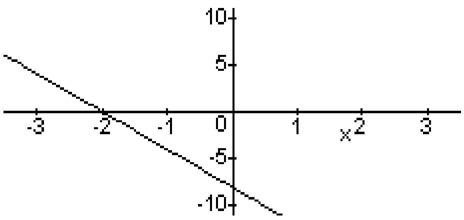
G.3.1.i) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 8$



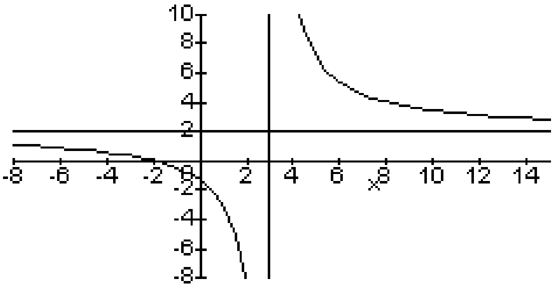
G.3.1.j) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 8 + 4x$



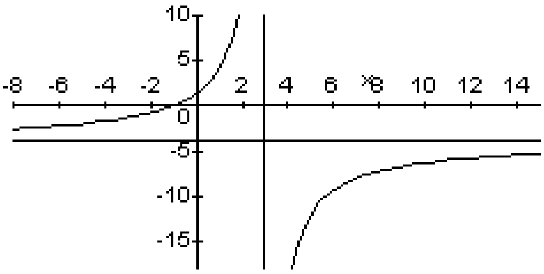
G.3.1.k) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -4x - 8$



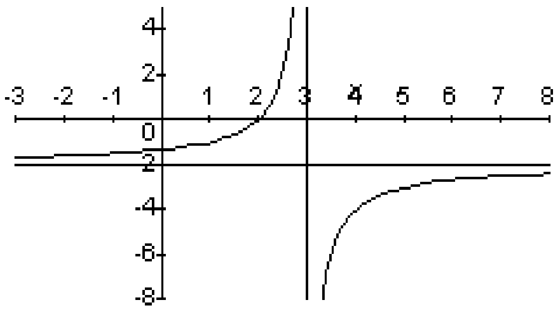
G.3.2.a) f: $\mathbf{R}\backslash\{3\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-3}$



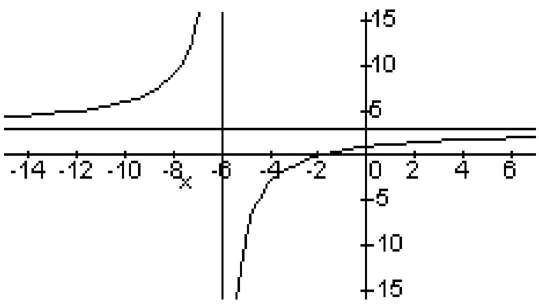
G.3.2.b) f: $\mathbf{R}\backslash\{3\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\dfrac{4x+4}{x-3}$



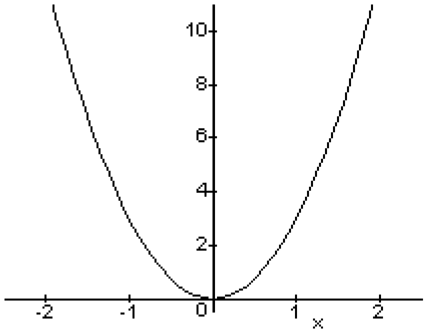
G.3.2.c) f: $\mathbf{R}\backslash\{3\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{-2x+4}{x-3}$



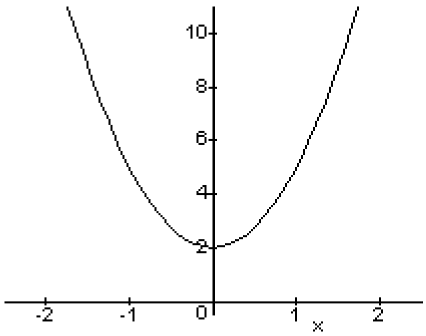
G.3.2.d) f: $\mathbf{R}\backslash\{-6\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+6}$



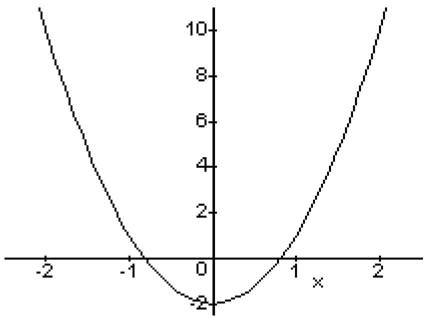
G.3.3.a) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2$



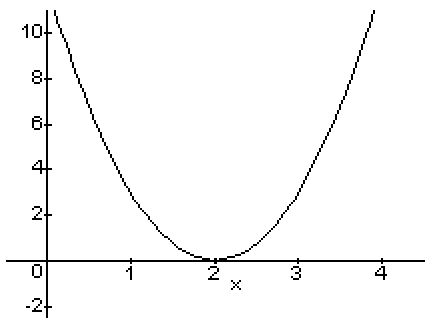
G.3.3.b) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2 + 2$



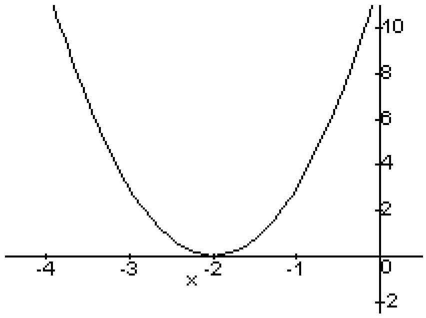
G.3.3.c) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x^2 - 2$



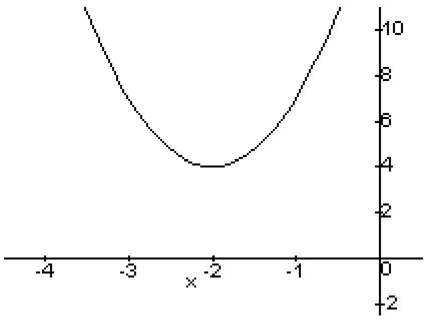
G.3.3.d) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3(x-2)^2$



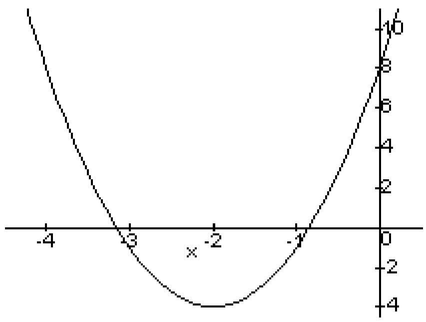
G.3.3.e) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3(x+2)^2$



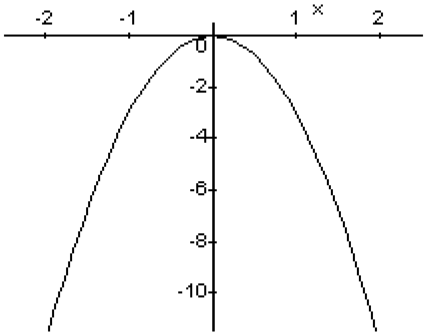
G.3.3.f) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3(x+2)^2 + 4$



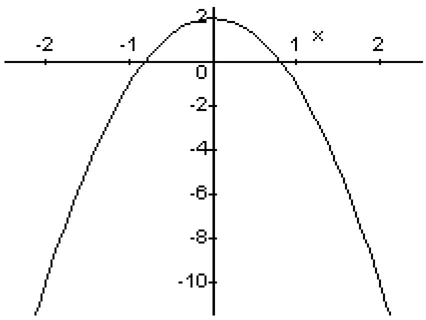
G.3.3.g) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3(x+2)^2 - 4$



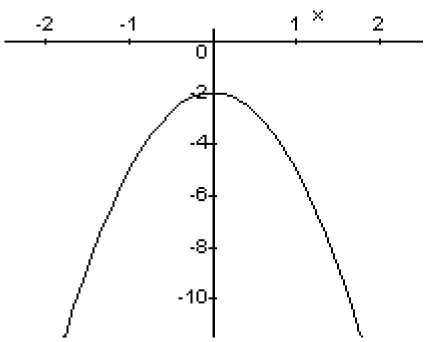
G.3.3.h) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x^2$



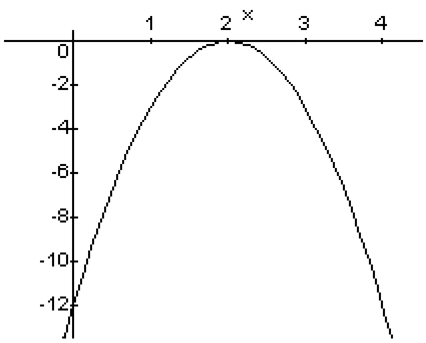
G.3.3.i) f: **R** → **R**, $f(x) = -3x^2 + 2$



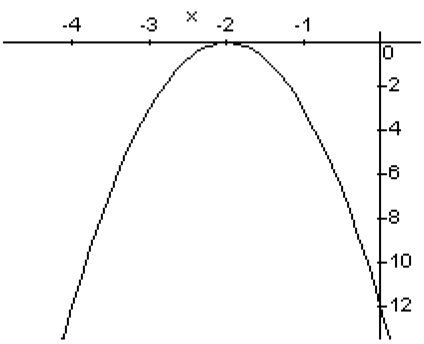
G.3.3.j) f: **R** → **R**, $f(x) = -3x^2 - 2$



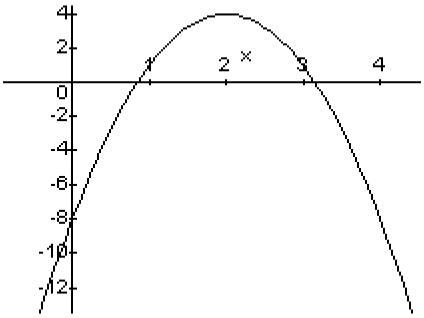
G.3.3.k) f: **R** → **R**, $f(x) = -3(x-2)^2$



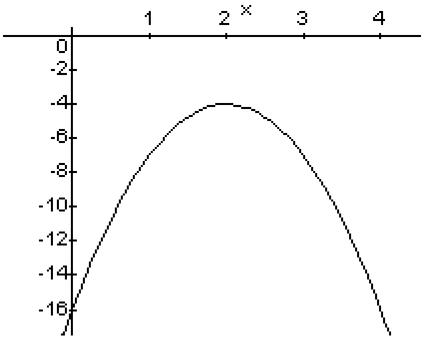
G.3.3.l) f: **R** → **R**, $f(x) = -3(x+2)^2$



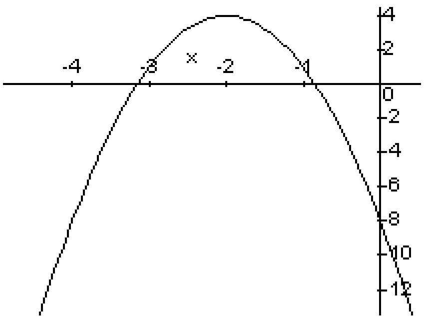
G.3.3.m) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x) = -3(x-2)^2 + 4$



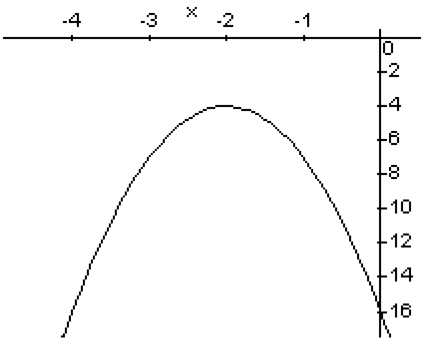
G.3.3.n) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x) = -3(x-2)^2 - 4$



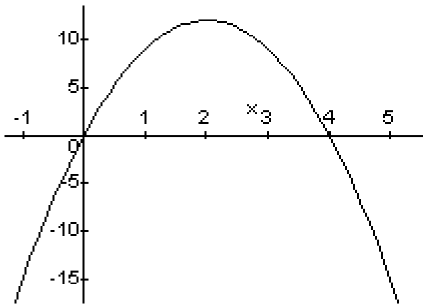
G.3.3.o) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x) = -3(x+2)^2 + 4$



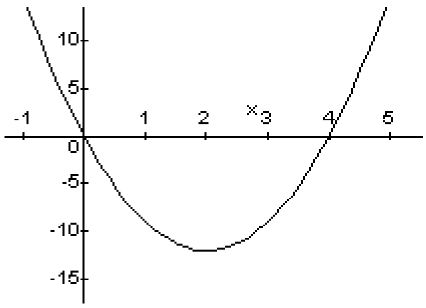
G.3.3.p) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x) = -3(x+2)^2 - 4$



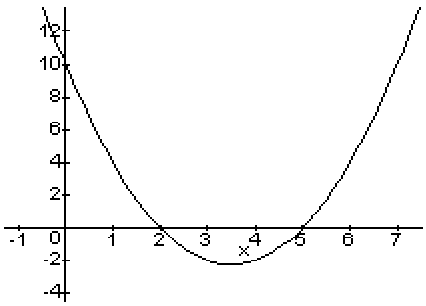
G.3.3.q) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x)=12x-3x^2$



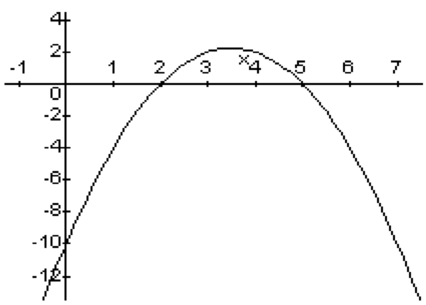
G.3.3.r) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x)=3x^2-12x$



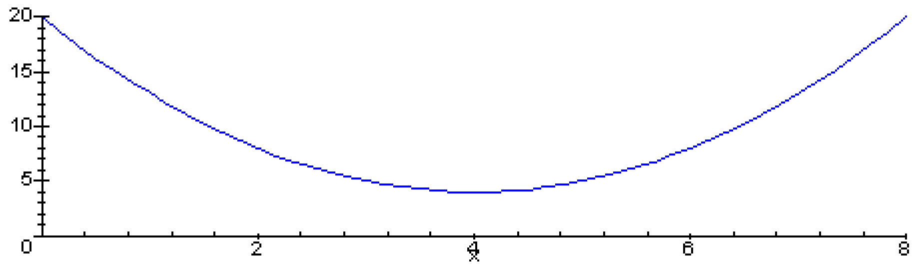
G.3.3.s) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x)=x^2-7x+10$



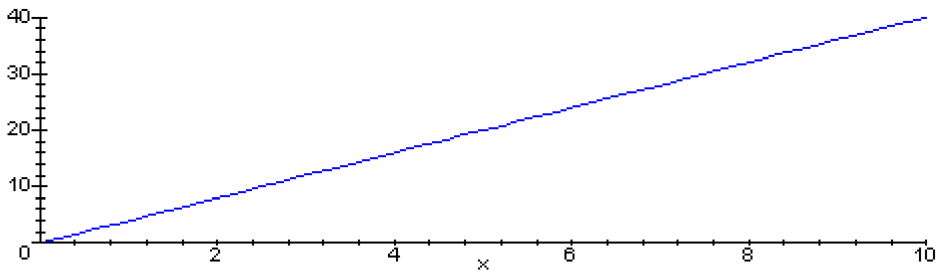
G.3.3.t) f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x)=7x-x^2-10$



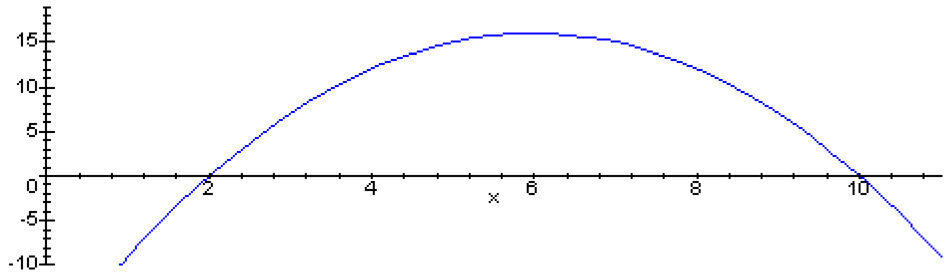
G.3.4 A $K:K(x)=x^2-8x+20$ költség-függvény grafikonja:



a $B:B(x)=4x$ bevétel-függvény grafikonja:



és az $N:N(x)=12x-x^2-20$ nyereség-függvény grafikonja:



b) Ha x ezer darab terméket helyett $x+1$ ezer darab terméket értékesítünk, akkor az árbevétel 4 ezer euróval nő, vagyis ha x darab termék helyett $x+1$ darab terméket értékesítünk, akkor az árbevétel 4 euróval lesz több.

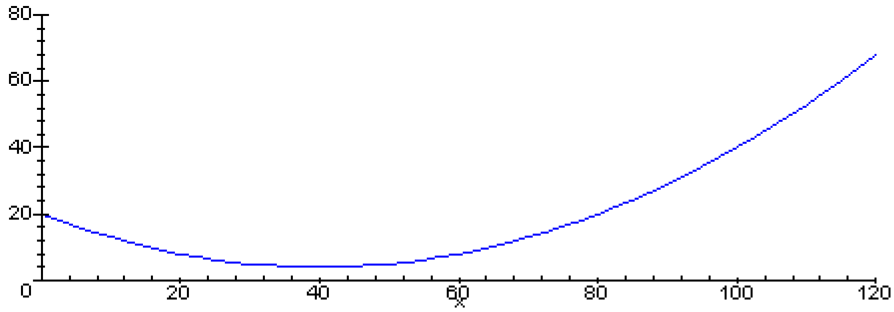
c) Legalább 2 000 terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a termelés gazdaságos legyen.

e) A költségünk 4 000 termék gyártása esetén lesz minimális.

f) A termelés 2 000 és 10 000 termék gyártása és értékesítése között lesz gazdaságos.

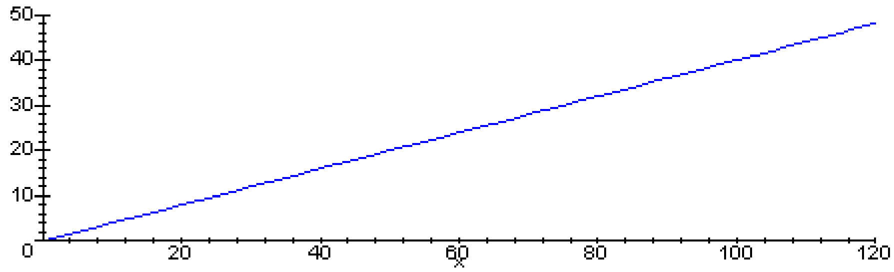
g) A nyereség 6 000 termék gyártása esetén lesz maximális – 16 000 euró.

G.3.5 A $K:K(x)=0{,}01x^2-0{,}8x+20$ költség-függvény grafikonja:

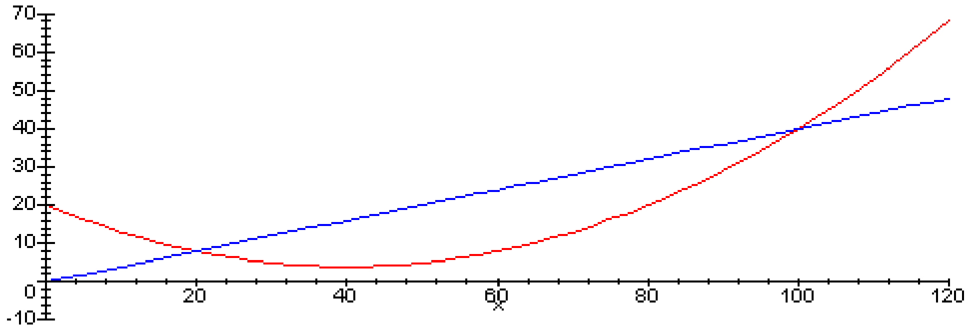


A termelési költség 40 termék gyártása esetén lesz minimális.

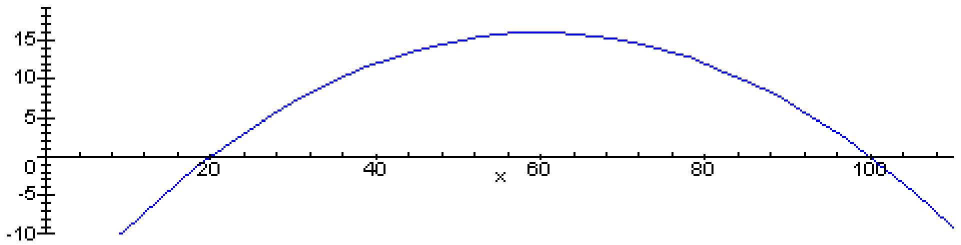
A $B:B(x)=0{,}4x$ bevétel-függvény grafikonja:



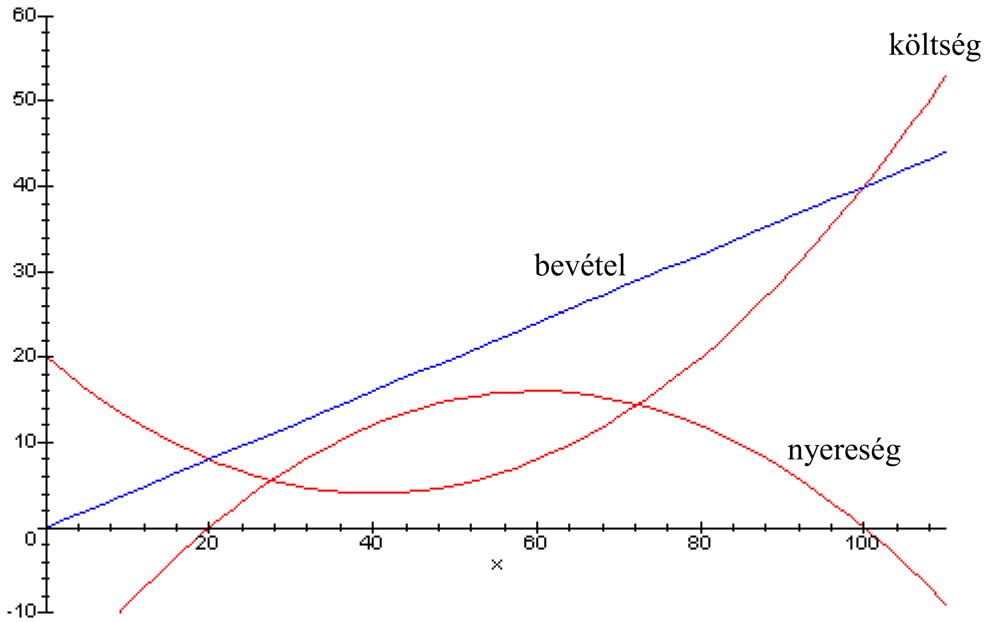
és a kettő együtt közös koordinátarendszerben:



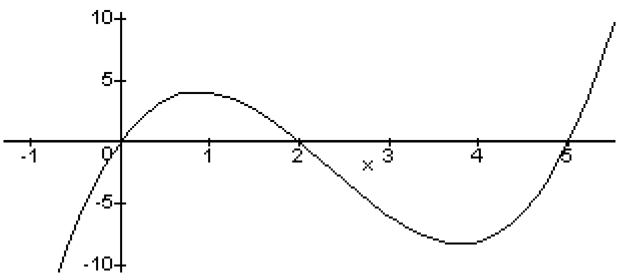
A termelés nyílván akkor gazdaságos, ha az árbevétel nagyobb termelési költségnél, vagyis amikor a parabola grafikonja az egyenes alatt helyezkedik el, esetünkben a $[20,100]$ intervallumon. A nyereség $N:N(x)=B(x)-K(x)=1{,}2x-0{,}01x^2-20$. A függvény grafikonja:



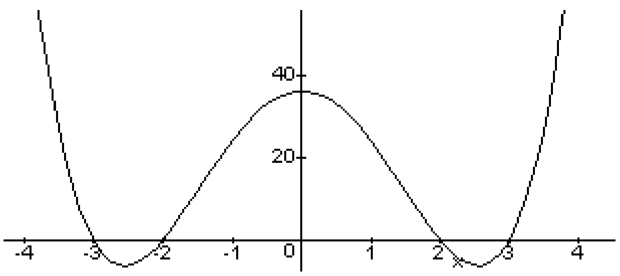
amelyből látszik, hogy a termelés 60 termék esetén eredményezi a maximális nyereséget. Íme a három függvény grafikonja egy koordinátarendszerben:



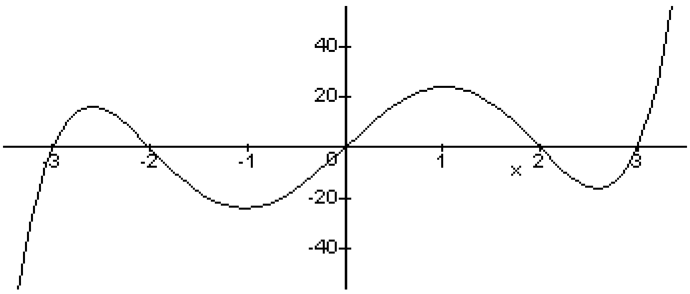
G.3.6.a) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$



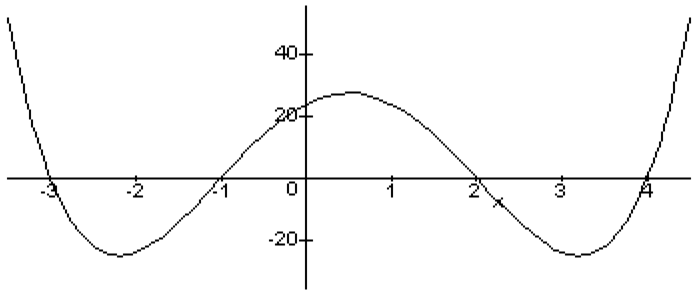
G.3.6.b) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$



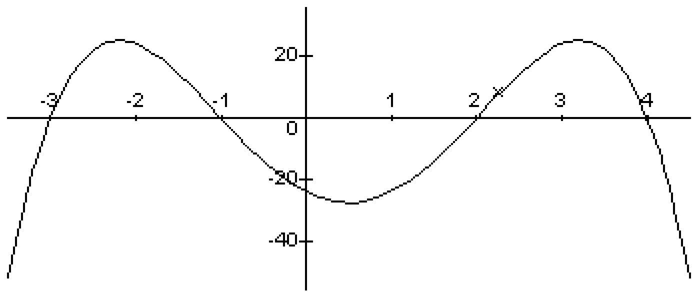
G.3.6.c) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 - 13x^3 + 36x$



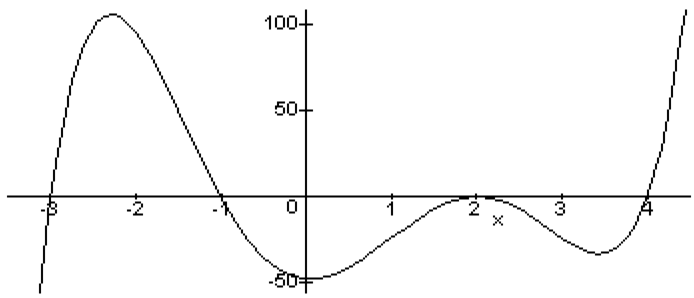
G.3.6.d) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$



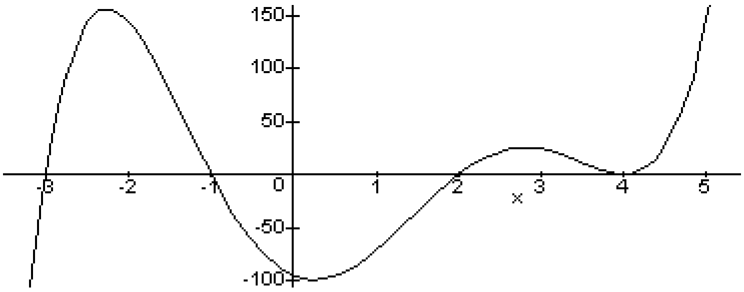
G.3.6.e) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (4-x)(x-2)(x+1)(x+3)$



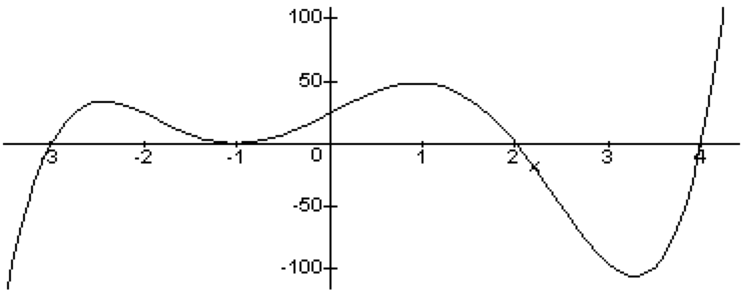
G.3.6.f) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-4)(x-2)^2(x+1)(x+3)$



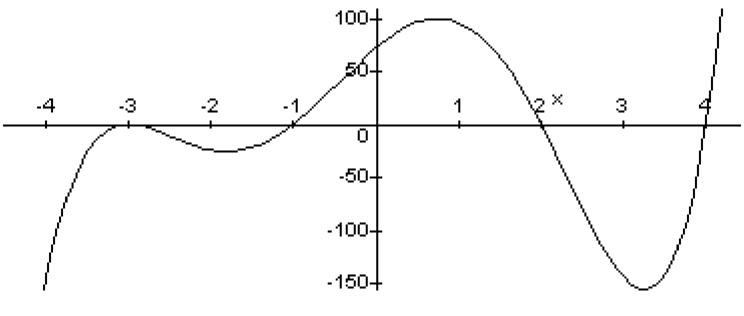
G.3.6.g) *f*: **R** → **R**, $f(x) = (x-4)^2(x-2)(x+1)(x+3)$



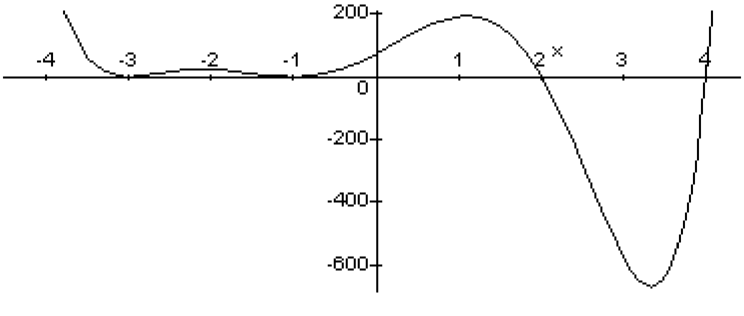
G.3.6.h) *f*: **R** → **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x+3)$



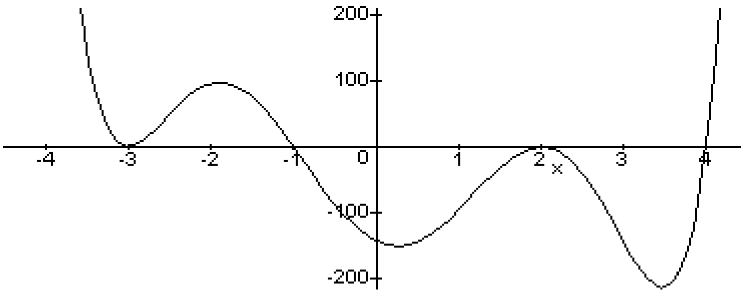
G.3.6.i) *f*: **R** → **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)(x+3)^2$



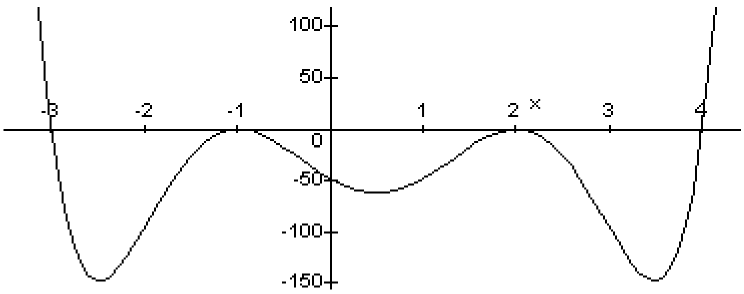
G.3.6.j) *f*: **R** → **R**, $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x+3)^2$



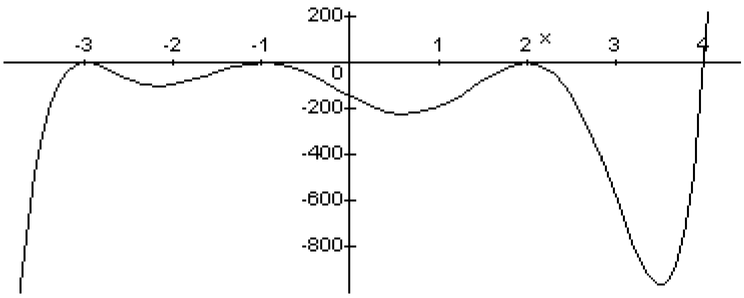
G.3.6.k) *f*: **R** → **R**, $f(x)=(x-4)(x-2)^2(x+1)(x+3)^2$



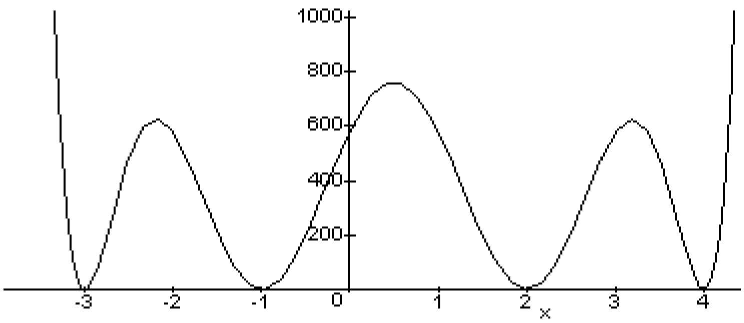
G.3.6.l) *f*: **R** → **R**, $f(x)=(x-4)(x-2)^2(x+1)^2(x+3)$



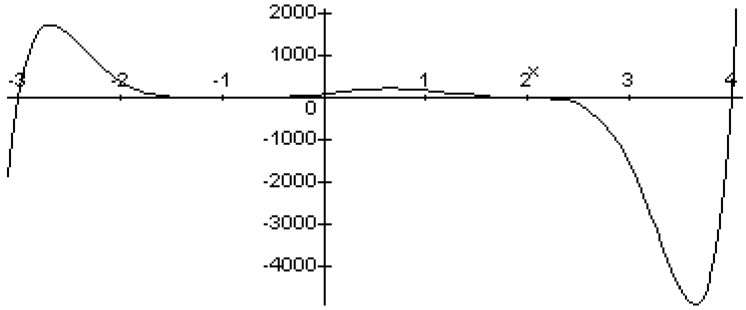
G.3.6.m) *f*: **R** → **R**, $f(x)=(x-4)(x-2)^2(x+1)^2(x+3)^2$



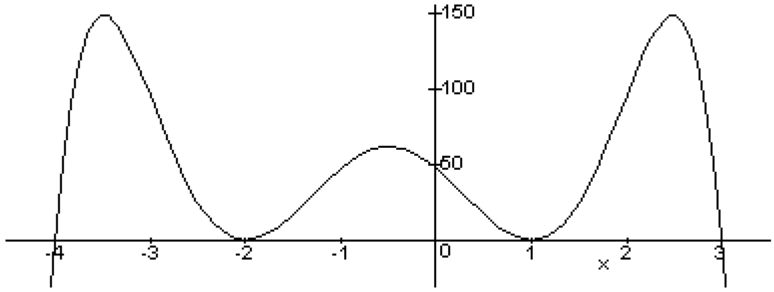
G.3.6.n) *f*: **R** → **R**, $f(x)=(x-4)^2(x-2)^2(x+1)^2(x+3)^2$



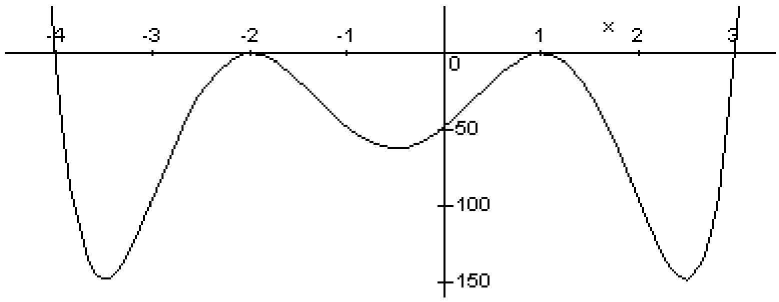
G.3.6.o) f: **R** $\to$ **R**, $f(x)=(x-4)(x-2)^3(x+1)^4(x+3)$



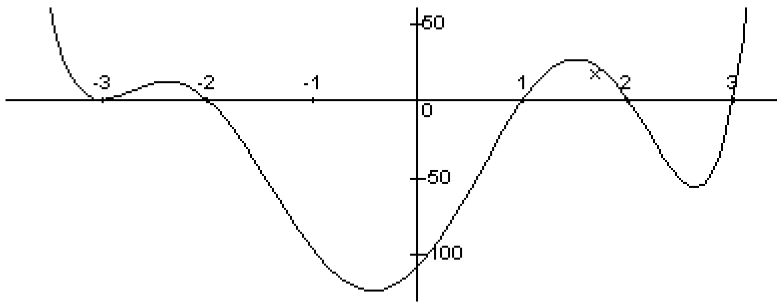
G.3.6.p) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(4x-x^2-3)(x^2+x-2)(x^2+6x+8)$



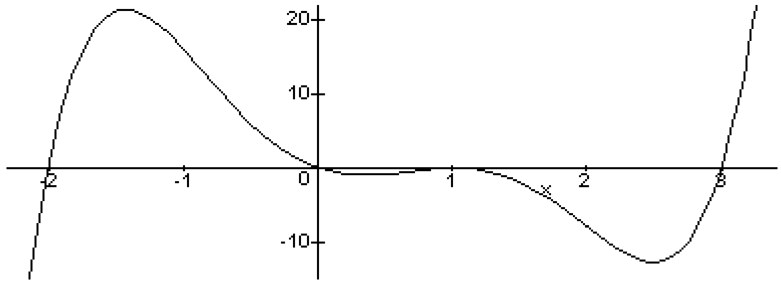
G.3.6.q) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x^2-4x+3)(x^2+x-2)(x^2+6x+8)$



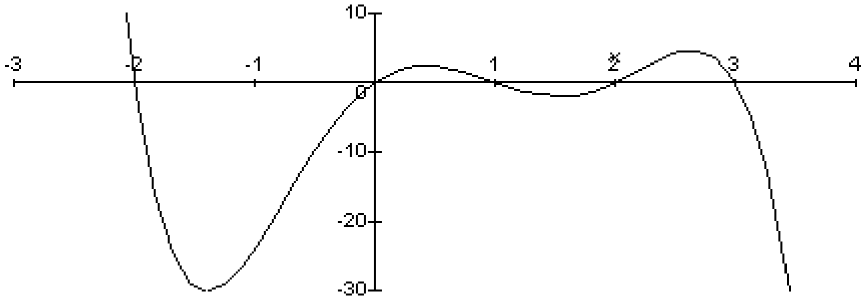
G.3.6.r) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x^2-4x+3)(x^2+x-6)(x^2+5x+6)$



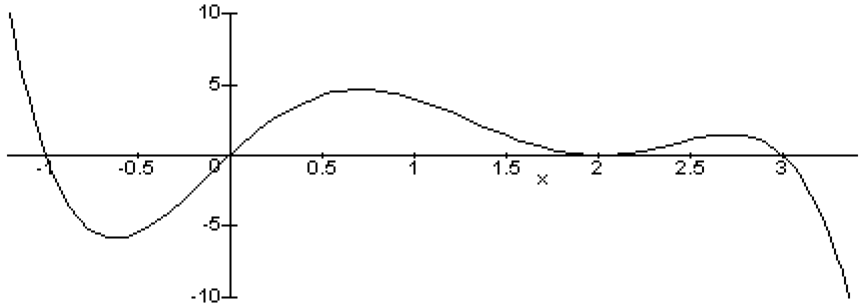
G.3.6.s) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^2-4x+3)(x^3+x^2-2x)$



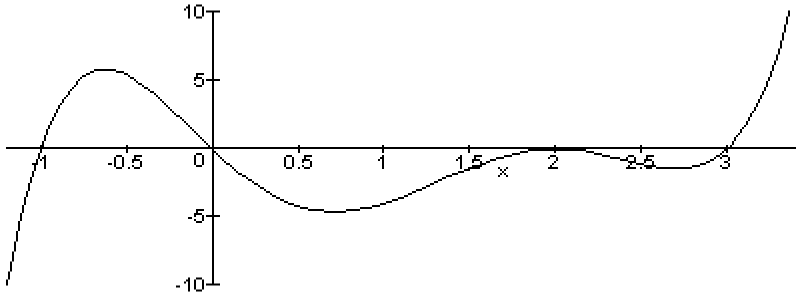
G.3.6.t) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(5x^2-6x-x^3)(x^2+x-2)$



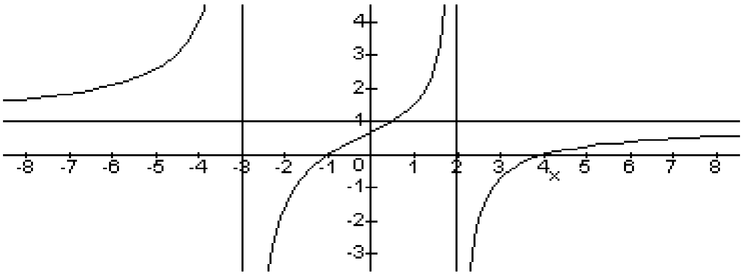
G.3.6.u) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(5x^2-x^3-6x)(x^2-x-2)$



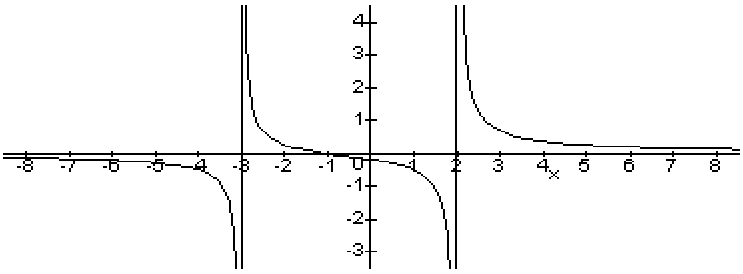
G.3.6.v) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x^3-5x^2+6x)(x^2-x-2)$



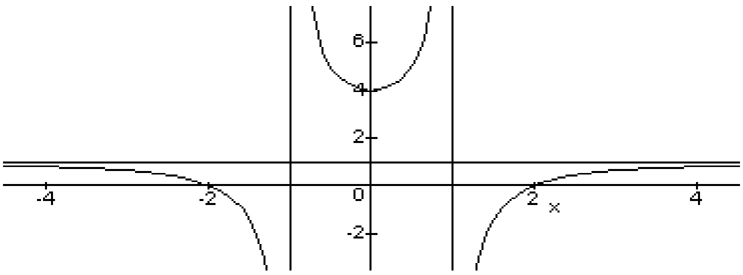
G.3.7.a) f: $\mathbf{R}\backslash\{-3;\ 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$



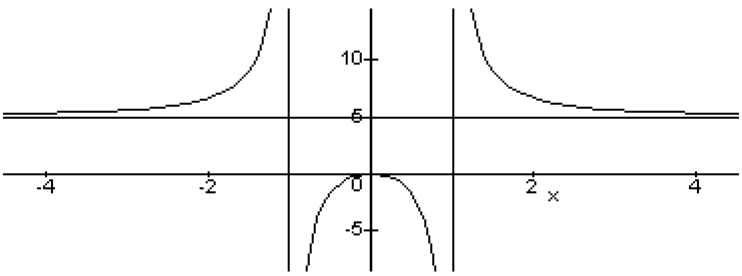
G.3.7.b) f: $\mathbf{R}\backslash\{-3;\ 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$



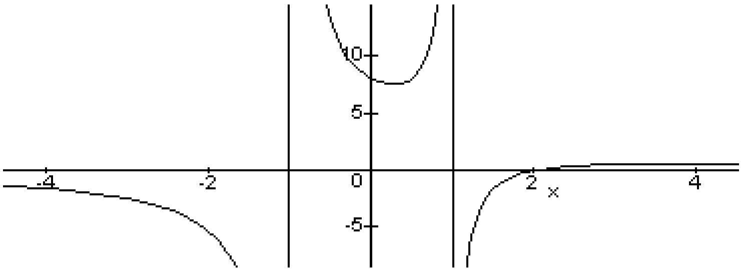
G.3.7.c) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\ 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$



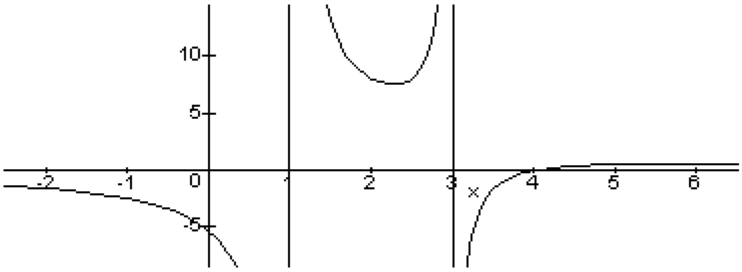
G.3.7.d) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1;\ 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2}{(x-1)(x+1)}$



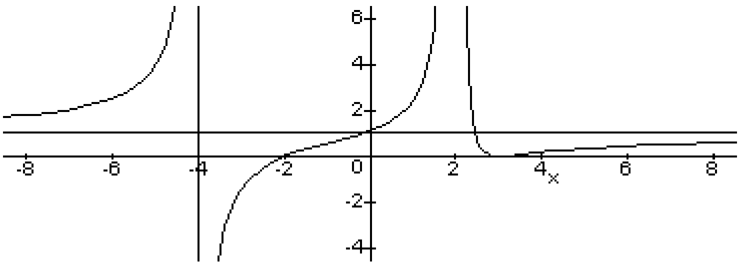
G.3.7.e) f: **R**\{–1; 1} → **R**, $f(x)=\dfrac{4x-8}{(x-1)(x+1)}$



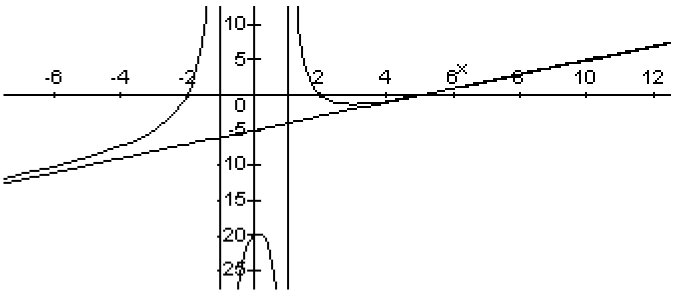
G.3.7.f) f: **R**\{1; 3} → **R**, $f(x)=\dfrac{4x-16}{(x-1)(x-3)}$



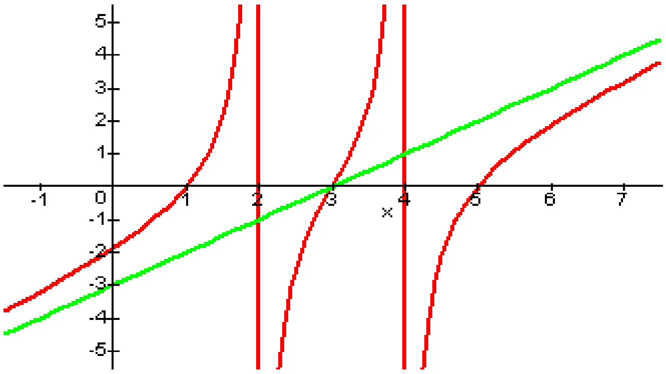
G.3.7.g) f: **R**\{–4; 2} → **R**, $f(x)=\dfrac{(x-3)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+4)}$



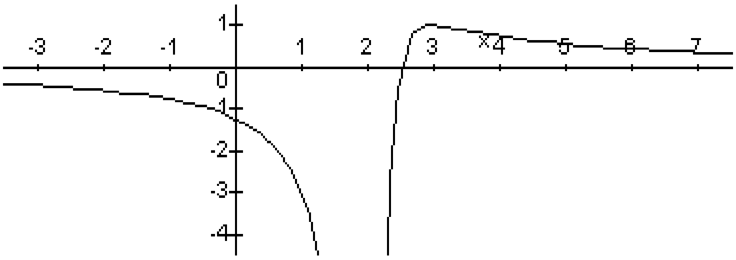
G.3.7.h) f: **R**\{–1; 1} → **R**, $f(x)=\dfrac{(x-5)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$



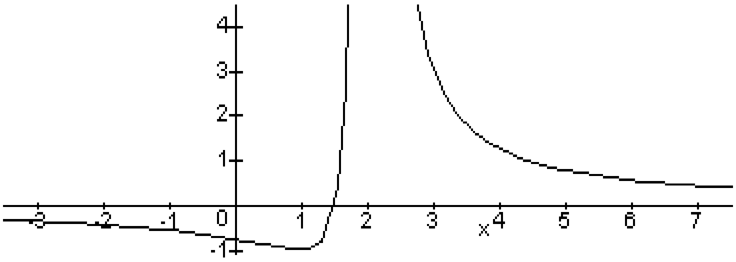
G.3.7.i) f: **R**$\setminus\{2; 4\} \to$ **R**, $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-4)}$



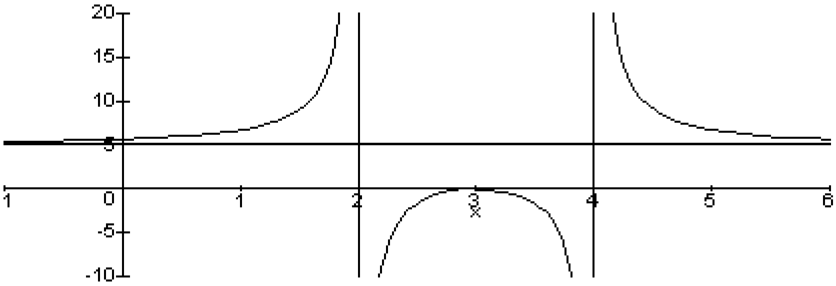
G.3.7.j) f: **R**$\setminus\{2\} \to$ **R**, $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-4x+4}$



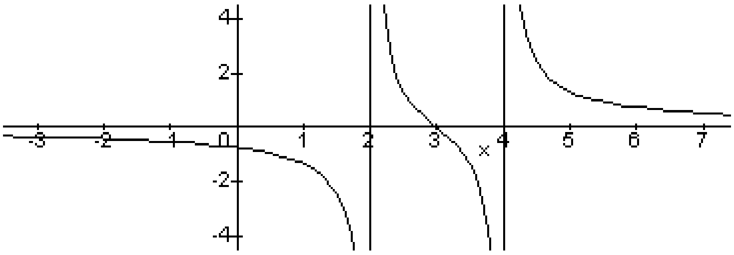
G.3.7.k) f: **R**$\setminus\{2\} \to$ **R**, $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4x+4}$



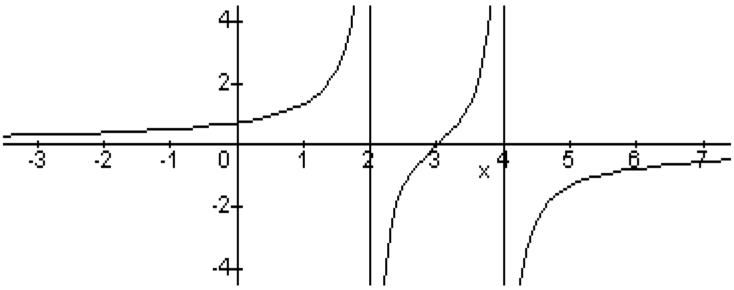
G.3.7.l) f: **R**$\setminus\{2, 4\} \to$ **R**, $f(x) = \dfrac{5x^2-30x+45}{x^2-6x+8}$



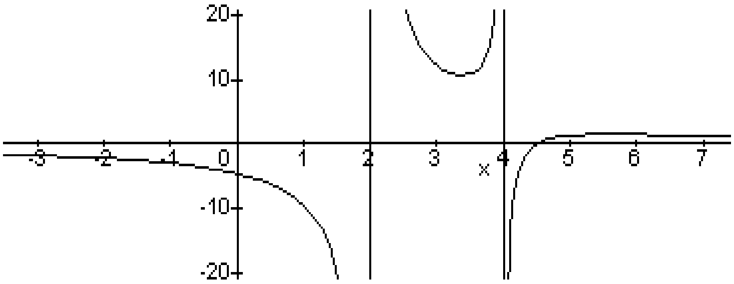
G.3.7.m) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-6x+8}$



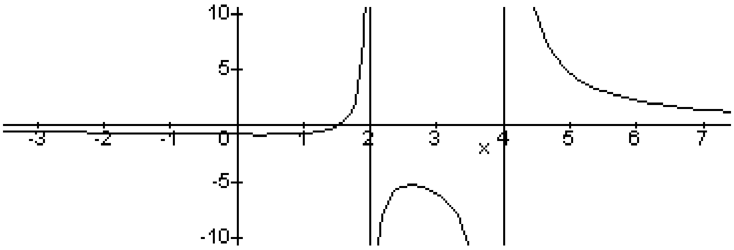
G.3.7.n) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-6}{6x-x^2-8}$



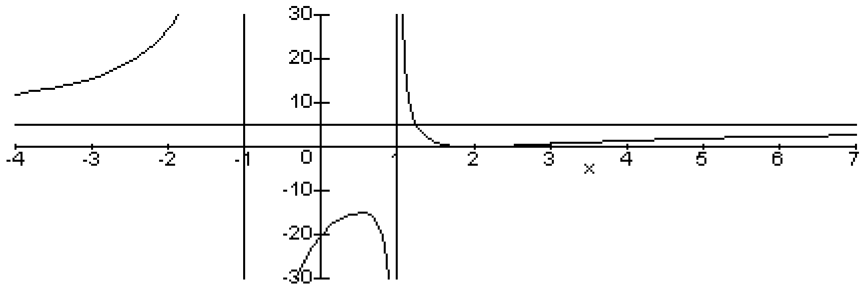
G.3.7.o) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{8x-36}{x^2-6x+8}$



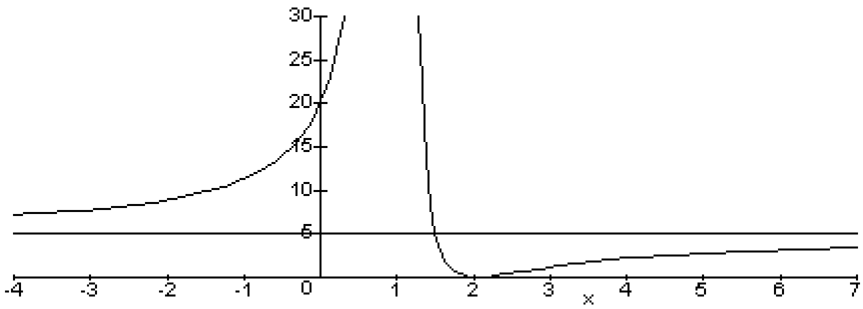
G.3.7.p) f: $\mathbf{R}\backslash\{2, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4x-6}{x^2-6x+8}$



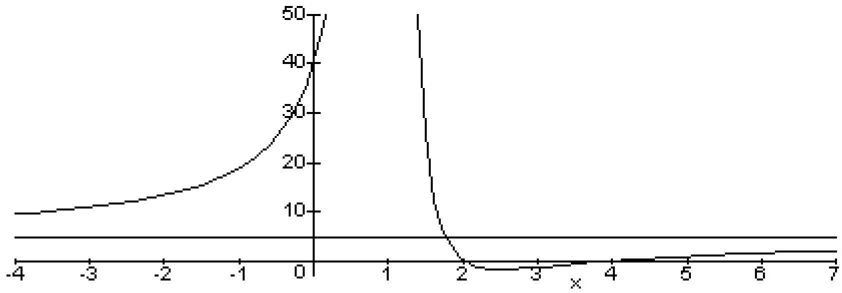
G.3.7.q) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{5x^2-20x+20}{x^2-1}$



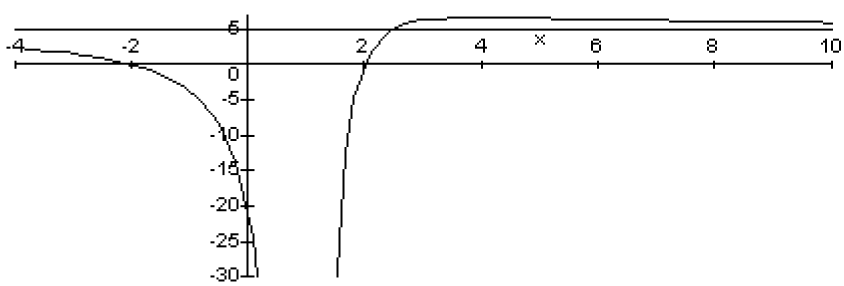
G.3.7.r) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{5x^2-20x+20}{(x-1)^2}$



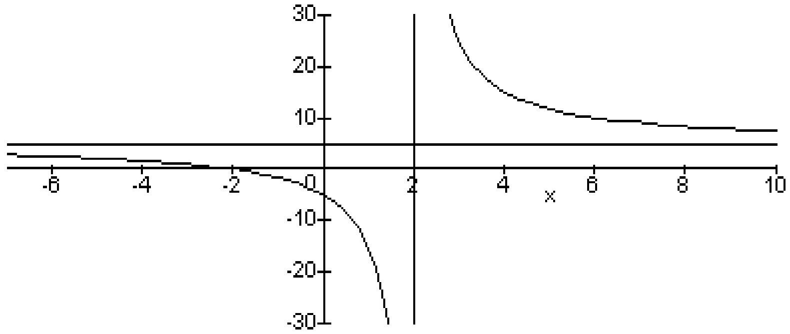
G.3.7.s) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{5x^2-30x+40}{(x-1)^2}$



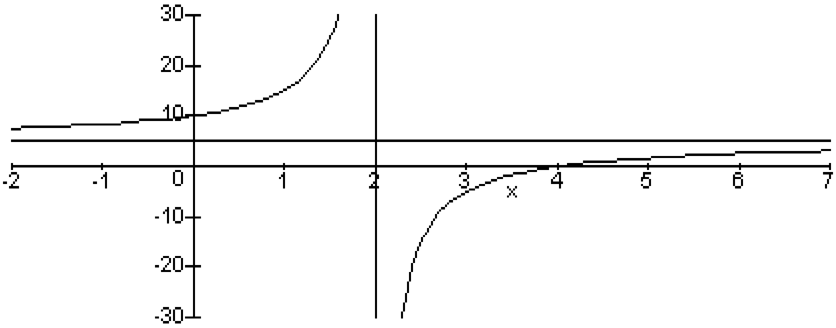
G.3.7.t) f: $\mathbf{R}\backslash\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{5x^2-20}{(x-1)^2}$



G.3.7.u) *f*: **R**\{2, 6} → **R**, $f(x)=\dfrac{5x^2-20x-60}{x^2-8x+12}$

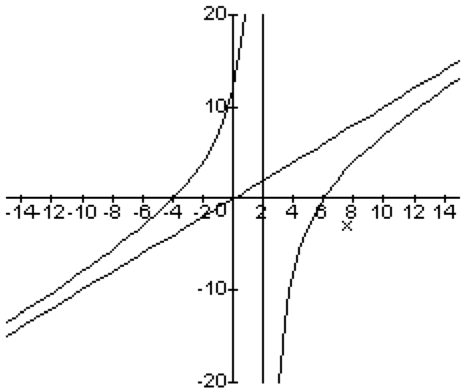


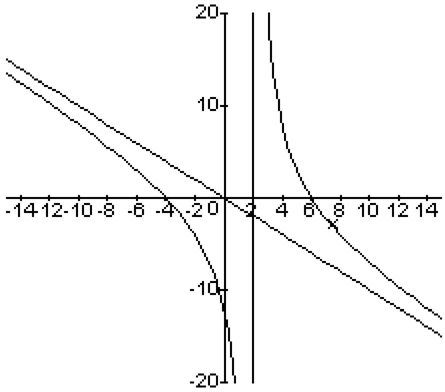
G.3.7.v) *f*: **R**\{2, 6} → **R**, $f(x)=\dfrac{5x^2-50x+120}{x^2-8x+12}$



G.3.7.w) *f*: **R**\{2} → **R**, $f(x)=\dfrac{x^2-2x-24}{x-2}$ (bal oldali ábra)

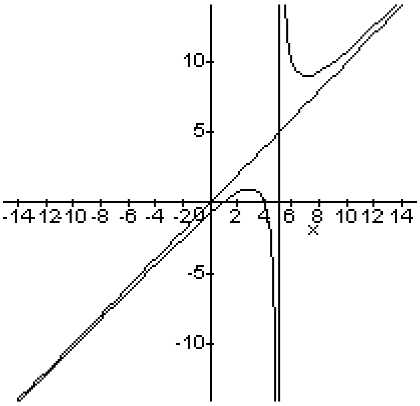
G.3.7.x) *f*: **R**\{2} → **R**, $f(x)=\dfrac{x^2-2x-24}{2-x}$ (jobb oldali ábra)

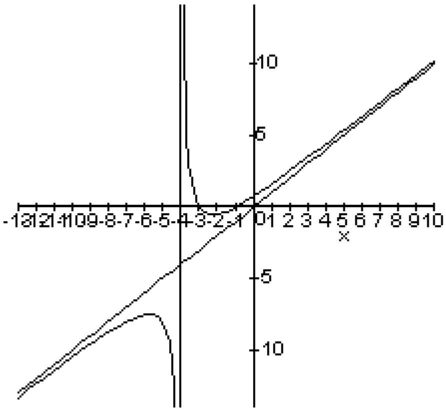




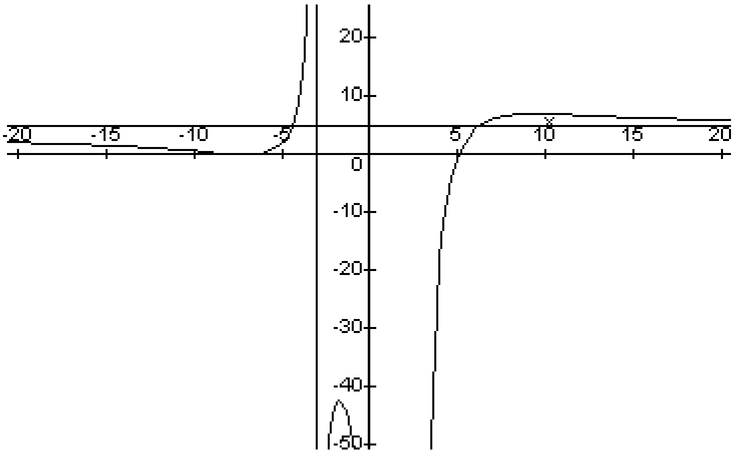
G.3.7.y) f: **R**\{5} → **R**, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ (bal oldali ábra)

G.3.7.z) f: **R**\{-4} → **R**, $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+4}$ (jobb oldali ábra)





G.3.7.aa) f: **R**\{-3, 2} → **R**, $f(x)=\dfrac{4(x-5)(x+7)^2}{(x-2)^2(x+3)}$

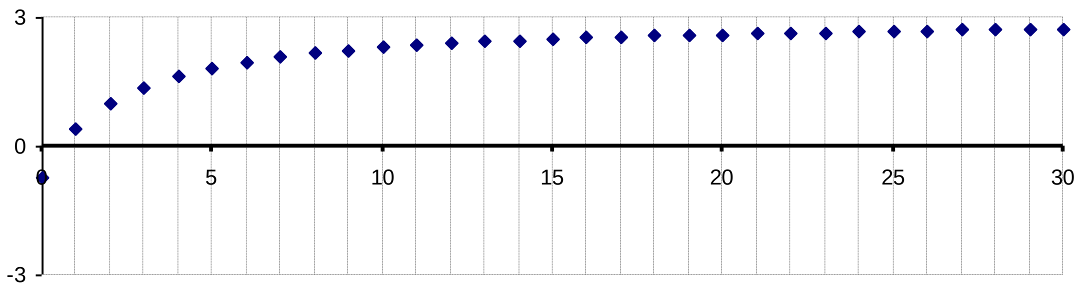


A 4. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

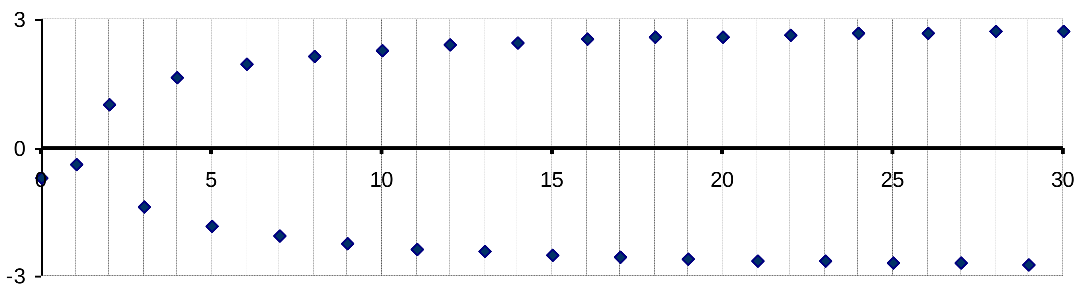
G.4.1.a) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{9n-5}{3n+7}$. Szigorúan monoton növekvő. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = a_0 = -\dfrac{5}{7}$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = 3$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 3$. Az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó küszöbszám: 84; az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 864; az $\varepsilon = 0{,}001$-hez tartozó küszöbszám: 8664.

$a_{84} = 2{,}8996139$; $a_{864} = 2{,}989996152$; $a_{8664} = 2{,}998999962$.

$a_{85} = 2{,}900763359$; $a_{865} = 2{,}990007686$; $a_{8665} = 2{,}999000077$.



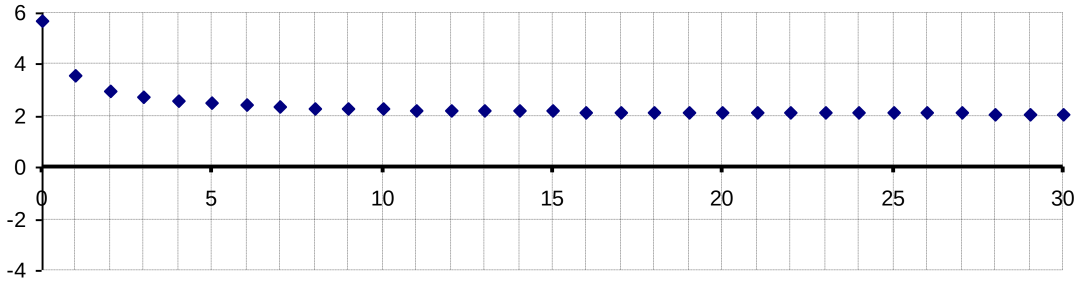
G.4.1.b) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{9n-5}{3n+7}$. Nem monoton. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = -3$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = 3$. Divergens, torlódási pontja: $A = 3$ és $A = -3$.



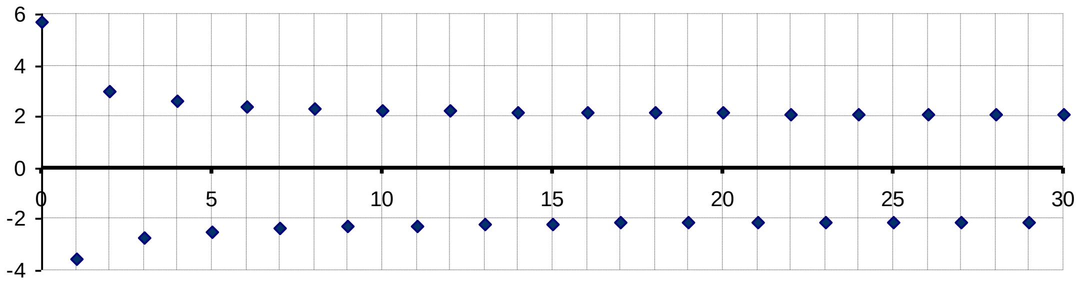
G.4.1.c) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{8n+17}{4n+3}$. Szigorúan monoton csökkenő. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = 2$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_0 = \dfrac{17}{3}$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 2$. Az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó küszöbszám: 26; az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 274; az $\varepsilon = 0{,}001$-hez tartozó küszöbszám: 2749.

$a_{26} = 2{,}102803738$; $a_{274} = 2{,}010009099$; $a_{2749} = 2{,}001000091$.

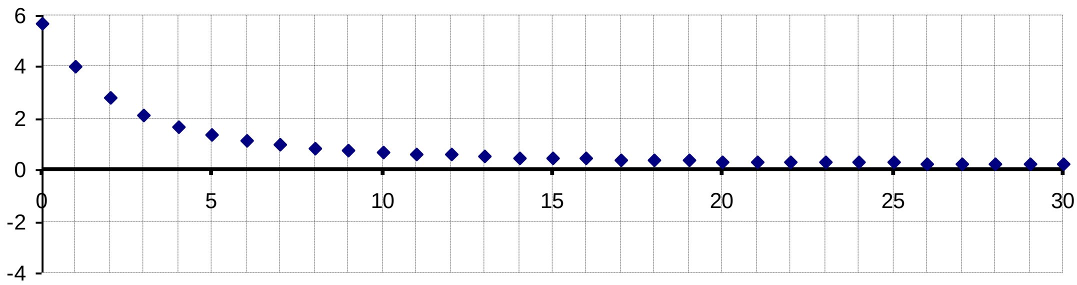
$a_{27} = 2{,}099099099$; $a_{275} = 2{,}009972801$; $a_{2750} = 2{,}000999727$.



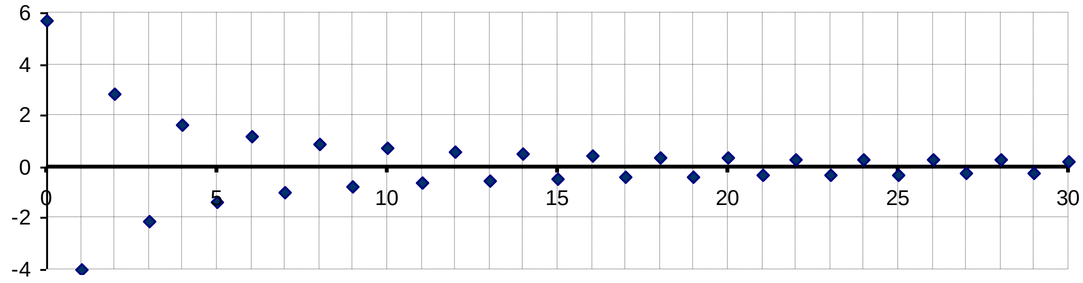
G.4.1.d) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{8n+17}{4n+3}$. Nem monoton. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_1 \approx -3{,}57$, pontos felső korlát: $\sup \langle a_n \rangle = a_0 = \dfrac{17}{3}$. Divergens, torlódási pontja: $A = 2$ és $A = -2$.



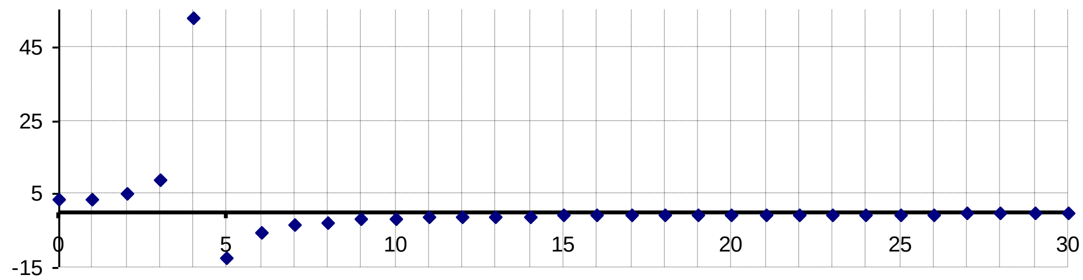
G.4.1.e) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{7n+17}{n^2+2n+3}$. Szigorúan monoton csökkenő. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = 0$, pontos felső korlát: $\sup \langle a_n \rangle = a_0 = \dfrac{17}{3}$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 700. $a_{700} =$ 0,010006044.



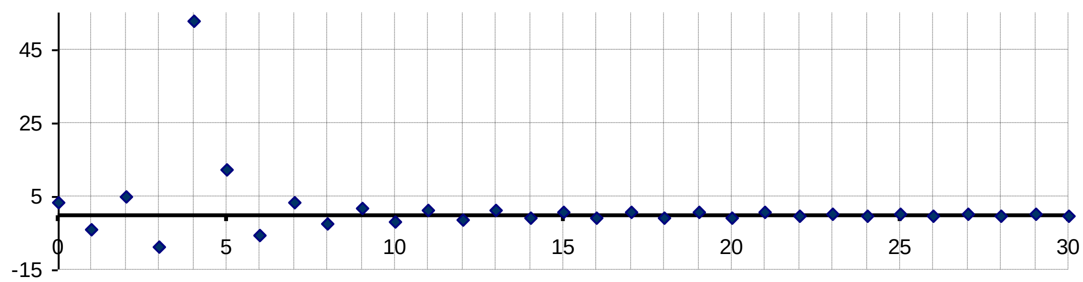
G.4.1.f) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{7n+17}{n^2+2n+3}$. Nem monoton. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_1 = -4$, pontos felső korlát: $\sup \langle a_n \rangle = a_0 = \dfrac{17}{3}$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 700. $a_{700} =$ 0,010006044.



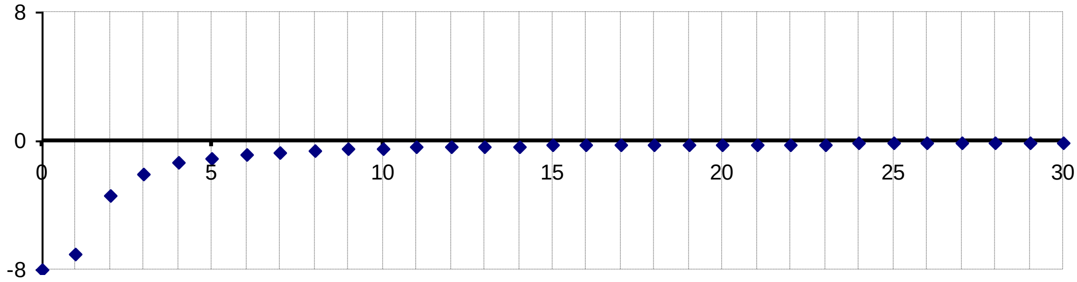
G.4.1.g) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{9n+17}{3n-n^2+5}$. Nem monoton. Pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_5 = -12{,}4$, pontos felső korlát: $\sup \langle a_n \rangle = a_4 = 53$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 904. $a_{904} =$-0,010009834.



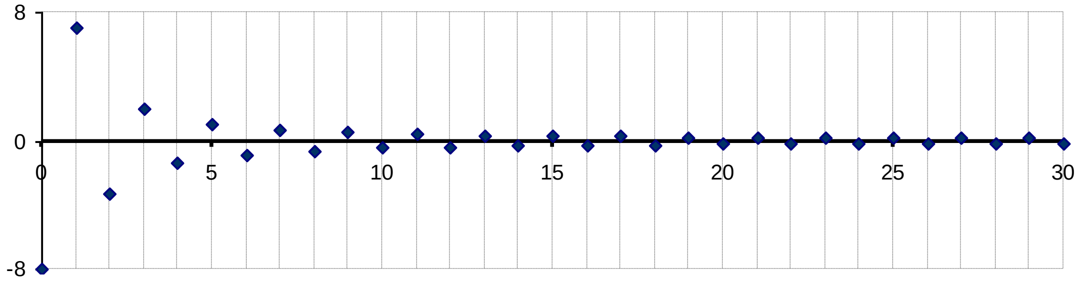
G.4.1.h) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{9n+17}{3n-n^2+5}$. Nem monoton. Pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_3 = -8{,}8$, pontos felső korlát: $\sup \langle a_n \rangle = a_4 = 53$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 904. $a_{904} =$-0,010009834.



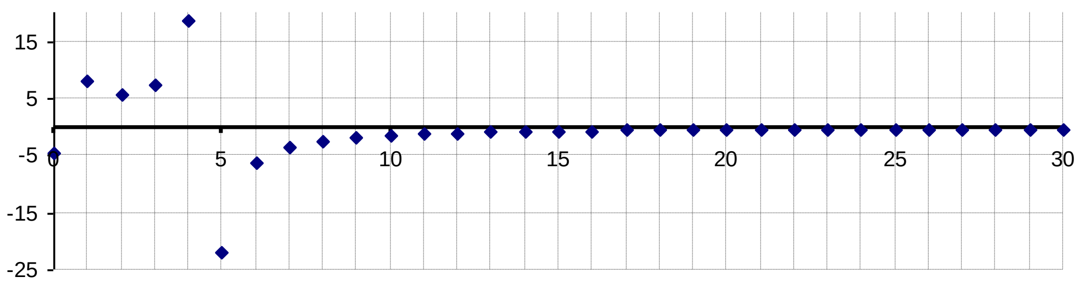
G.4.1.i) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{12n+16}{n-3n^2-2}$. Szigorúan monoton növekvő. Pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = a_0 = -8$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = 0$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tatrozó küszöbszám: 401. $a_{401} =$ -0,010016514.



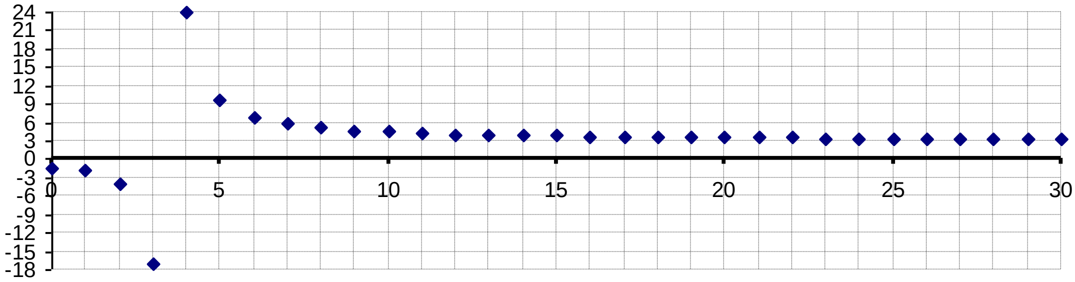
G.4.1.j) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{12n+16}{n-3n^2-2}$. Nem monoton. Pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = a_0 = -8$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_1 = 7$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 401. $a_{401} =$ 0,010016514.



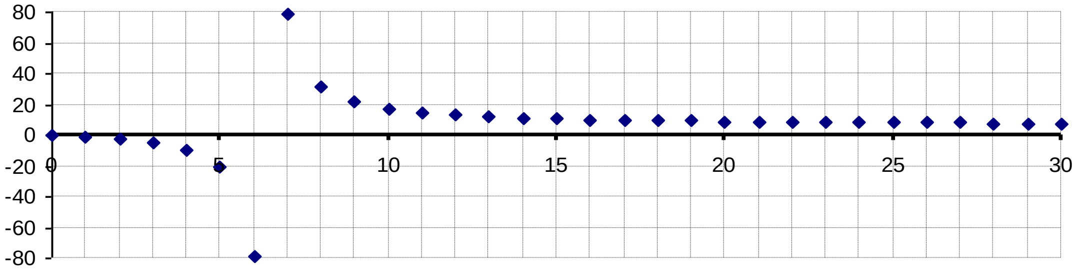
G.4.1.k) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{7n+9}{5n-n^2-2}$. Nem monoton. Pontos alsó korlát: $\inf\langle a_n \rangle = a_5 = -22$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_4 = 18{,}5$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 0$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 706. $a_{706} =$ -0,01000388.



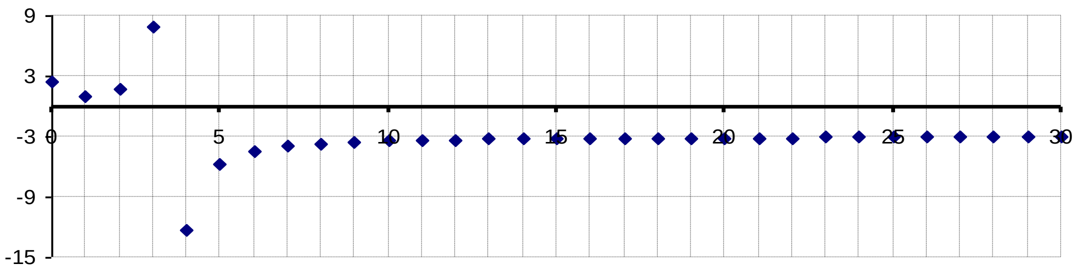
G.4.1.l) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{9n^2+3n+12}{3n^2-8n-9}$. Nem monoton. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_3 = -17$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_4 = 24$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 3$. Az $\varepsilon = 0{,}01$-hoz tartozó küszöbszám: 904. $a_{904} = 3{,}010001199$.



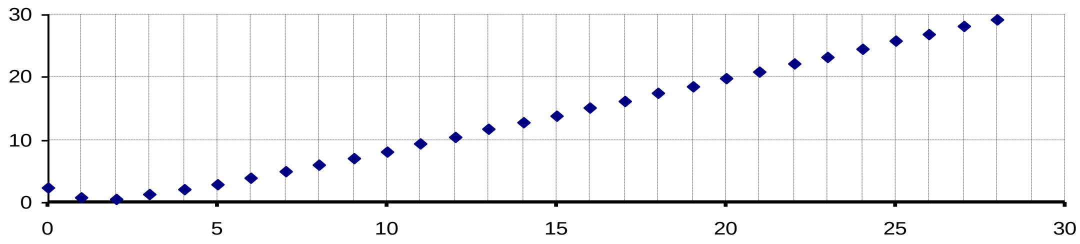
G.4.1.m) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{12n^2+6n+3}{2n^2-12n-6}$. Nem monoton. Pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_6 = -78{,}5$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_7 = 79{,}125$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = 6$. Az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó küszöbszám: 396. $a_{396} = 6{,}100128208$.



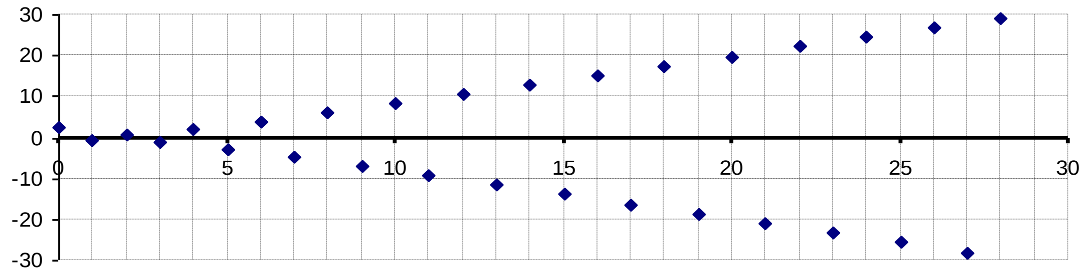
G.4.1.n) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{6n^2-13n+17}{5n-2n^2+7}$. Nem monoton. Korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_4 = -12{,}2$, pontos felső korlát: $\sup\langle a_n \rangle = a_3 = 8$. Konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n \rangle = -3$. Az $\varepsilon = 0{,}001$-hez tartozó küszöbszám: 1021. $a_{1021} =$ -3,001000111.



G.4.1.o) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = \dfrac{6n^2 - 15n + 17}{5n+7}$. Nem monoton, $n \geq 2$ esetén szigorúan monoton növekvő. Alulról korlátos, pontos alsó korlát: $\inf \langle a_n \rangle = a_2 = \dfrac{11}{17}$, felülről nem korlátos. Divergens.



G.4.1.p) $\langle a_n \rangle$: **N→R,** $a_n = (-1)^n \dfrac{6n^2 - 15n + 17}{5n+7}$. Nem monoton. Alulról nem korlátos, felülről nem korlátos. Divergens.



G.4.2.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 + 2n + 4}{3n^2 - 5n - 7} = 2$, nem monoton, $n_\varepsilon = 403$,

$\inf a_n = -6{,}4$ $\sup a_n = 12{,}8$.

G.4.2.b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2 + 3n + 9}{2n^2 - 5n - 7} = 4$, nem monoton, $n_\varepsilon = 1154$,

$\inf a_n = -22{,}5$ $\sup a_n = 29{,}8$.

G.4.2.c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2 - 6n + 3}{3n^2 - 7n - 8} = 3$, nem monoton, $n_\varepsilon = 504$,

$\inf a_n = -33$ $\sup a_n = 10{,}25$

G.4.2.d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n+3}{2n+7} = 4$, szigorúan monoton növekvő, $n_\varepsilon = 1247$

$\inf a_n \dfrac{11}{9} \approx 1{,}2$ $\sup a_n = 4$.

G.4.2.e) $\langle b_n \rangle$: **N⁺→R,** $b_n = (-1)^n \dfrac{8n+3}{2n+7}$ – divergens, nem monoton,

torlódási pontjai: -4 és 4, $\inf a_n = -4$ $\sup a_n = 4$.

G.4.2.f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+9}{4n-3}=2$, szigorúan monoton csökkenő, $n_\varepsilon=375$,

$\inf a_n=2$ $\sup a_n=17.$

G.4.2.g) $\langle b_n\rangle:\mathbf{N}^+\to\mathbf{R},\ b_n=(-1)^n\dfrac{8n+9}{4n-3}$ – divergens, nem monoton,

torlódási pontjai: -2 és 2 $\inf a_n=-17$ $\sup a_n=5.$

G.4.2.h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+4}{2n^2+7n+3}=0$, szigorúan monoton csökkenő, $n_\varepsilon=397$,

$\inf a_n=0$ $\sup a_n=1.$

G.4.2.i) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{8n+4}{2n^2+7n+3}=0$, nem monoton, $n_\varepsilon=397$

$\inf a_n=-1$ $\sup a_n=0{,}8.$

G.4.3.a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5n-6}{9n^2-2n-7}=\dfrac{4}{9}$

G.4.3.b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5n^2-6}{9n^2-2n-7}=\dfrac{5}{9}$

G.4.3.c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+4n-6}{3n-2n^2-7}=-\dfrac{5}{2}$

G.4.3.d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+8n-6}{3n^2-2n-7}=\dfrac{4}{3}$

G.4.3.e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+5n^3-6}{3n^2-2n-7}=+\infty$

G.4.3.f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-5n^3-6}{9n^2-2n-7}=-\infty$

G.4.3.g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{7n-2}\right)^{2n+3}=e^{12/7}$

G.4.3.h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-2}\right)^{2n+3}=e^{12/5}$

G.4.3.i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-2}\right)^{3n+123}=e^{18/5}$

G.4.3.j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{5+7n}\right)^{2n+4}=e^{-2/7}$

G.4.3.k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{5-7n}\right)^{2n+4}=e^{18/7}$

G.4.3.l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-5n^4-6}{9n^2-2n^5-7n}=0$

G.4.3.m) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5n^2-6}{9n^2-2n^3-7}=0$

G.4.3.n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+4n-6}{3n-2n^3-7}=-\dfrac{5}{2}$

G.4.3.o) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{4n+5n^2-6}{9n^2-2n^3-7}$ $\nexists$

G.4.3.p) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{4n^2+8n-6}{3n^2-2n-7}$ $\nexists$

G.4.3.q) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{4n^2-5n^3-6}{9n^2-2n-7}$ $\nexists$

G.4.3.r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+4}{5-7n}\right)^{2n+3}=-e^{18/7}$

G.4.3.s) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{2-5n}\right)^{4n-3}=-e^{32/5}$

G.4.3.t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n+7}{9n-5}\right)^{3n+5}=0$

G.4.3.u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+3}{8n-7}\right)^{5n+6}=+\infty$

G.4.3.v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+5}{3-8n}\right)^{2n+3}$ $\nexists$

Az 5. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

G.5.1.a) A) 472 000 Ft; B) 477 007 Ft; C) 478 247 Ft.

G.5.1.b) 241 127 Ft.

G.5.1.c) Körülbelül 4 év alatt.

G.5.1.d) A második (B) árajánlat mai értéke

a) 4%-s kamatláb esetén 411 149 Ft, vagyis az (A) árajánlat a kedvezőbb;

b) 7%-s kamatláb esetén 385 704 Ft, vagyis a (B) árajánlat a kedvezőbb;

c) 10%-s kamatláb esetén 362 960 Ft, vagyis szintén a (B) árajánlat a kedvezőbb.

G.5.1.e) A második (B) árajánlat mai értéke

a) 5%-s kamatláb esetén 520 216 Ft, vagyis az (A) árajánlat a kedvezőbb;

b) 8%-s kamatláb esetén 480 763 Ft, vagyis a (B) árajánlat a kedvezőbb;

c) 6,484%-s kamatláb esetén 500 006 Ft, vagyis a két árajánlat megegyezik.

G.5.1.f) B)<A)<D)<C

G.5.1.g) C)<D)<A)<B

G.5.2.a) 12,55%

G.5.2.b) A havi 3%, mert $1{,}03^{12} \approx 1{,}4258$

G.5.2.c) A) 775 511 Ft $= 400000 \cdot 1{,}18^{4}$

B) 817 391 Ft $= 400000 \cdot 1{,}015^{48}$

C) 820 752 Ft $= 400000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}18}{52}\right)^{208}$

D) 821 773 Ft $= 400000 \cdot \left(e^{0{,}18}\right)^{4}$

G.5.2.d) A) 881 171 Ft $= 500000 \cdot 1{,}12^{5}$

B) 908 348 Ft $= 500000 \cdot 1{,}01^{60}$

C) 910 430 Ft $= 500000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}12}{52}\right)^{260}$

D) 911 059 Ft $= 500000 \cdot \left(e^{0{,}12}\right)^{5}$

G.5.2.e) 34,49%

G.5.2.f) D)<A)<B<C)

G.5.2.g) C)<A)<D<B)

G.5.3.a) 7,48%

G.5.3.b) 2005-ben kb. 5,6%; 2006-ban kb. 4,76%, 2007-ben kb. 7,4% és a három év alatt összesen kb. 18,83%-os volt a reálbér-növekedés.

G.5.3.c) 11,3%-s béremelés.

G.5.3.d) 20%

G.5.3.e) 21,43%-kal, mert $\frac{1{,}015^{12}}{1{,}09} \cdot \frac{1{,}015^{12}}{1{,}08} \approx 1{,}2143$

G.5.4.a) 256 187 Ft

G.5.4.b) 158 630 Ft

G.5.4.c) 18 076 Ft

G.5.4.d) 1,5%

G.5.4.e) Az öt év alatt összegyűjtött pénzünk 1 347 361 Ft, ehhez hozzáadódik a 24 hónap alatt törlesztett kölcsön összege 701 064 Ft, így a személygépkocsi 2 048 425 Ft-ba került.

G.5.5.a) Gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója:3,8667 mFt . Megtérülési rátája: 1,0939.

G.5.5.b) Nem gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója: -1,1827 mFt . Megtérülési rátája: 0,9719.

G.5.5.c) Gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója:0,0065 mFt . Megtérülési rátája: 1,0002. A belső megtérülési ráta kb. 10%.

G.5.5.d) Gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója:0,0126 mFt . Megtérülési rátája: 1,0004. A belső megtérülési ráta kb. 10%.

G.5.5.e) Nem gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója: -1,5612 mFt . Megtérülési rátája: 0,9546.

G.5.5.f) Nem gazdaságos. Nettó jelenérték-mutatója: -2,2092 mFt . Megtérülési rátája: 0,9475.

G.5.5.g) Nettó jelenérték-mutatója: 1,6 mFt

G.5.5.h) Megtérülési rátája: 1,25.

G.5.6 a) 296073,4 Ft b) 307064,9 Ft c) 308164,98 Ft

G.5.7 A) havi 3% = éves 42,576%, C) negyedévi 9% = éves 41,158%.

G.5.8 C) A) B)

G.5.9 2007 elejére összegyűlt pénzünk 292,451 Ft, ehhez 107,571 Ft a kölcsön összege.

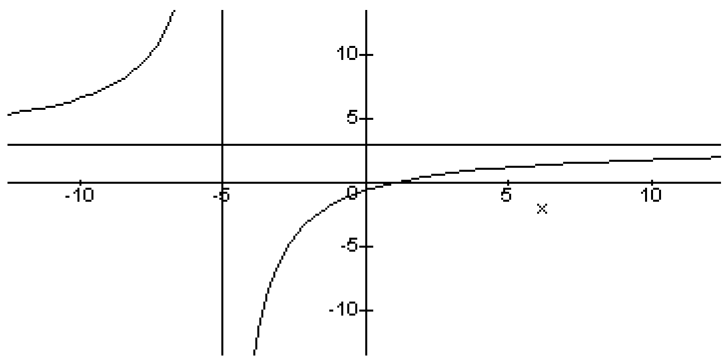
G.5.10 1,846762-szeresére.

G.5.11 Nettó jelenérték-mutató: 8,02 mFt, megtérülési ráta: 1,2875.

A 6. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

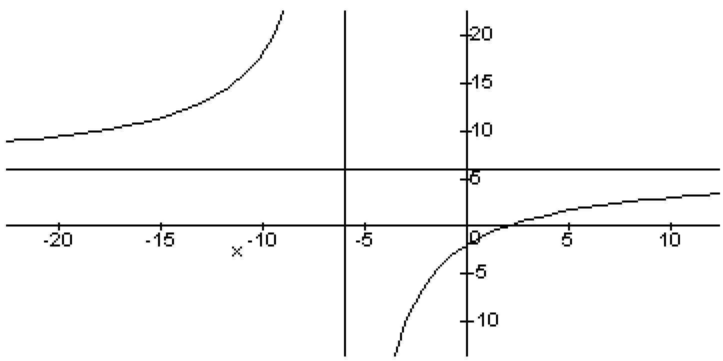
G.6.1.a) $f(x)=\dfrac{3x^2+6x-9}{x^2+8x+15}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-6$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to4} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to5} f(x)=\nexists$,



G.6.1.b) $f(x)=\dfrac{6x^2+12x-48}{x^2+10x+24}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$

$\lim\limits_{x\to-6} f(x)=\nexists$, $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=-18$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to6} f(x)=2$,

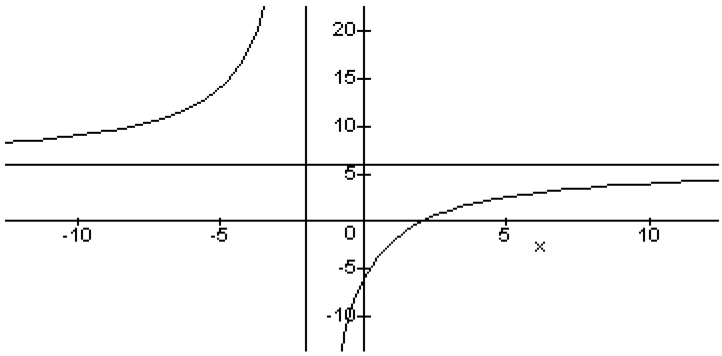


G.6.1.c) $f(x)=\dfrac{6x^3+12x^2-48x}{x^2+10x+24}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-6} f(x)=\nexists$, $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=72$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=12$,

G.6.1.d) $f(x)=\dfrac{6x^2+6x-36}{x^2+5x+6}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=30$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\nexists$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1{,}2$



G.6.1.e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^2+6x-36}{x^3+5x^2+6x}$, ahol $a=-3;-2;2;3;-\infty;+\infty$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-10$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\nexists$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0{,}4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

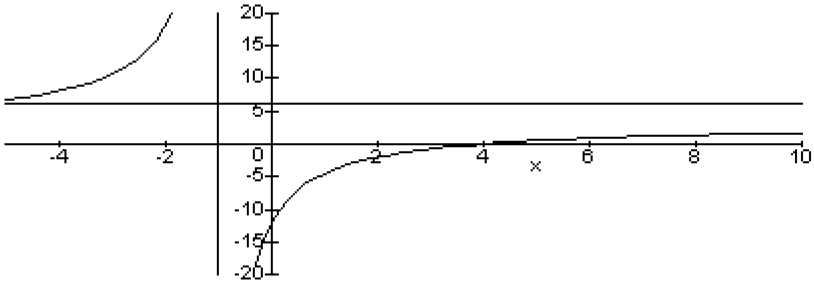
G.6.2.a) $\frac{9}{5}$ **G.6.2.b)** $\frac{9}{5}$ **G.6.2.c)** $\frac{9}{5}$ **G.6.2.d)** $\frac{9}{5}$ **G.6.2.e)** $\frac{5}{9}$

G.6.2.f) $\frac{7}{3}$ **G.6.2.g)** $\frac{7}{3}$ **G.6.2.h)** $\frac{7}{3}$ **G.6.2.i)** $\frac{7}{3}$ **G.6.2.j)** $\frac{3}{7}$

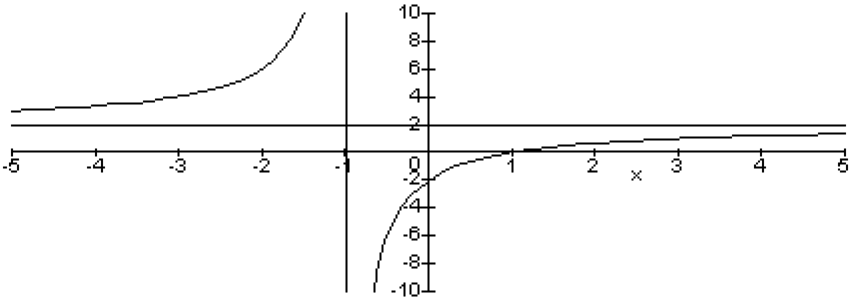
G.6.2.k) $\frac{9}{5}$ **G.6.2.l)** $\frac{9}{5}$ **G.6.2.m)** $\frac{9}{5}$ **G.6.2.n)** $\frac{9}{5}$

G.6.2.o) $\frac{81}{5}$ **G.6.2.p)** $\frac{81}{5}$ **G.6.2.q)** $\frac{81}{25}$ **G.6.2.r)** $\frac{81}{25}$

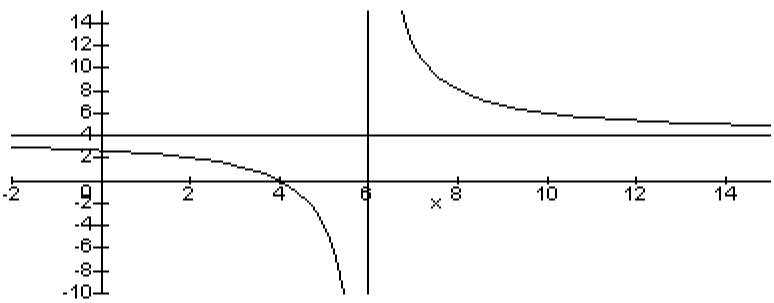
G.6.3.a) Nem, mivel $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$ és $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ nem létezik, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ és $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$. A függvény grafikonja:



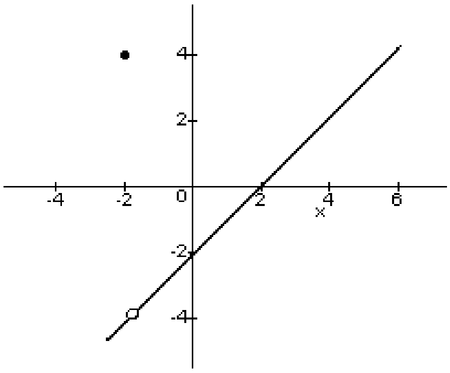
G.6.3.b) Igen, folytonos, mert $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$. Továbbá: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$.



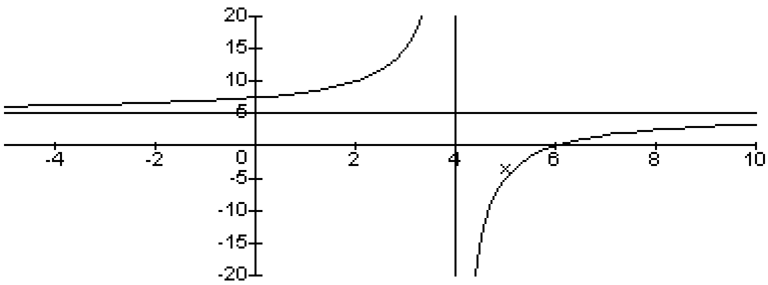
G.6.3.c) Igen, folytonos, mert $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$. Továbbá: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 4$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$.



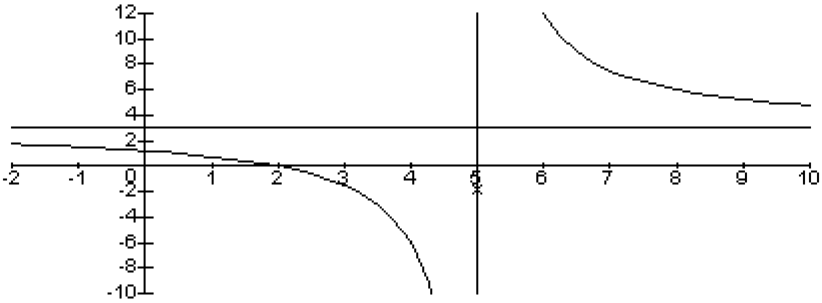
G.6.3.d) Az $x = 5$ pontban a függvény folytonos. Azonban az $x = -2$ nem, mivel $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -4$, viszont $f(-2) = 4$. Tehát a függvény nem folytonos. A függvény grafikonja megegyezik az $y = x - 2$ egyenes grafikonjával, kivéve az $x = -2$ pontban vett értéket, ahol is $f(-2) = 4$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ Íme a grafikonja:



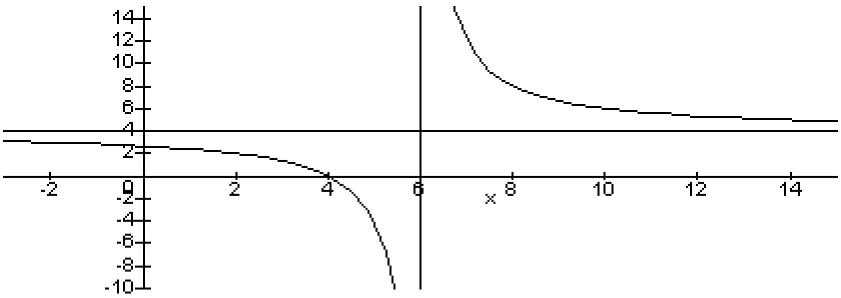
G.6.3.e) A függvény az $x=3$ pontban folytonos, mivel $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=15$ és $f(3)=15$. Azonban az $x=4$ pontban a függvénynek nem létezik véges határértéke, így a függvény nem folytonos. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=5$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=5$. A függvény grafikonja:



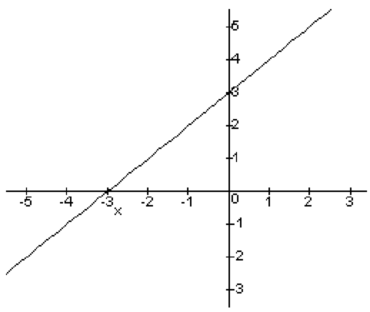
G.6.3.f) A függvény az $x=4$ pontban folytonos, mivel $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-6$ és $f(4)=-6$. Azonban az $x=5$ pontban a függvénynek nem létezik véges határértéke, így a függvény nem folytonos. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3$. A függvény grafikonja:



G.6.3.g) A függvény az $x=-2$ pontban folytonos, mivel $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ és $f(-2)=3$. Azonban az $x=6$ pontban a függvénynek nem létezik véges határértéke, így a függvény nem folytonos. $\lim_{x\to 6^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 6^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)=4$ és $\lim_{x\to -\infty} f(x)=4$. A függvény grafikonja:



G.6.3.h) A függvény folytonos, megegyezik az f: **R** →**R**, $f(x)=x+3$ függvénnyel. Íme a grafikonja:



G.6.4.a) $\lim_{x\to 6} f(x)=\frac{5}{42}\sin 18$

G.6.4.b) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{33}{13}$

G.6.4.c) $\lim_{x\to 11} f(x)=0$

G.6.4.d) $\lim_{x\to 13} f(x)$ – nem létezik

G.6.4.e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$

G.6.4.f) $\lim_{x\to 8} f(x)=\frac{3}{40}\sin 56$

G.6.4.g) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{35}{3}$

G.6.4.h) $\lim_{x\to 5} f(x)=0$

G.6.4.i) $\lim_{x\to 3} f(x)$ – nem létezik

G.6.4.j) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

G.6.4.k) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \frac{1}{15}\sin 45$

G.6.4.l) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{15}{2}$

G.6.4.m) $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$

G.6.4.n) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ – nem létezik

G.6.4.o) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$

G.6.5.a) Az A értékét nem lehet megadni; $B = -\frac{2}{3}\sin 18$ és $C = -\frac{30}{7}$.

G.6.5.b) Az $A = 7$ és $B = \frac{2}{3}\sin 15$, viszont a C értékét nem lehet megadni.

G.6.5.c) Az A értékét nem lehet megadni; $B = \frac{21}{5}$ és $C = \frac{5}{12}\sin 9$.

G.6.5.d) Az A értékét nem lehet megadni; $B = -\frac{5}{3}\sin 18$ és $C = -\frac{42}{5}$.

G.6.5.e) Az $A = 7$, a B értékét nem lehet megadni és $C = -\frac{1}{5}\sin 15$.

G.6.5.f) Az $A = -\frac{25}{3}$, a B értékét nem lehet megadni és $C = \frac{3}{7}\sin 35$.

A 7. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

G.7.1.a) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 7\cos x + 9\cdot 5x^4 - 8e^x - 5\frac{1}{\sin^2 x}$

G.7.1.b) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = -3\sin x + 5\frac{1}{2\sqrt{x}} - 6\cdot 3^x \ln 3 + 8\frac{1}{\cos^2 x}$

G.7.1.c) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 9\frac{1}{x} - 8\frac{-4}{x^5} - 7\frac{-1}{\sin^2 x} + 0 = \frac{9}{x} + \frac{32}{x^5} + \frac{7}{\sin^2 x}$

G.7.1.d) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 2\frac{1}{x\ln 3} + 3 - 4e^x - \frac{5}{\cos^2 x}$

G.7.1.e) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 600x^{99} + 9\cdot 5^x \cdot \ln 5 - 3\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 0$

G.7.1.f) $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\left(15x^2-9\cos x\right)\cdot\left(4\sqrt[3]{x}+6\log_5 x\right)+$
$\left(5x^3-9\sin x\right)\cdot\left(4\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}+6\frac{1}{x\ln 5}\right)$

G.7.1.g) $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\left(-\frac{30}{x^{11}}+4\sin x\right)\cdot\left(99^x+5\operatorname{tg} x\right)+$
$\left(\frac{3}{x^{10}}-4\cos x\right)\cdot\left(99^x\ln 99+\frac{5}{\cos^2 x}\right)$

G.7.1.h) $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\left(\frac{4}{x}-5\cdot 8^x\ln 8\right)\cdot\left(3\sin x+7\log_3 x\right)+$
$\left(4\ln x-5\cdot 8^x\right)\cdot\left(3\cos x+\frac{7}{x\ln 3}\right)$

G.7.1.i) $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\left(-\frac{8}{\sin^2 x}-7\right)\cdot\left(6\sqrt[5]{x}+\frac{5}{x^7}\right)+$
$\left(8\operatorname{ctg} x-7x\right)\cdot\left(6\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}-\frac{35}{x^8}\right)$ í

G.7.1.j) $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\left(4-0\right)\cdot\left(8\sqrt[7]{x^3}+6\log_4 x\right)+$
$\left(4x-3\sin 2\right)\cdot\left(8\cdot\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}+6\cdot\frac{1}{x\ln 4}\right)$

G.7.1.k) $f':D\to\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{\left(27x^2+4\sin x\right)\cdot\left(5e^x+6\operatorname{tg} x\right)-\left(9x^3-4\cos x\right)\cdot\left(5e^x+\frac{6}{\cos^2 x}\right)}{\left(5e^x+6\operatorname{tg} x\right)^2}$$

G.7.1.l) $f':D\to\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{\left(4\cdot 5^x\ln 5-7\cos x\right)\cdot\left(6\ln x+3\operatorname{ctg} x\right)-\left(4\cdot 5^x-7\sin x\right)\cdot\left(\frac{6}{x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)}{\left(6\ln x+3\operatorname{ctg} x\right)^2}$$

G.7.1.m) $f':D\to\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{\left(8\cdot\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{9}}-\frac{1}{x\ln 6}\right)\cdot\left(5\cdot 7^x-6\operatorname{ctg} x\right)-\left(8\sqrt[9]{x^4}-\log_6 x\right)\cdot\left(5\cdot 7^x\ln 7+\frac{6}{\sin^2 x}\right)}{\left(5\cdot 7^x-6\operatorname{ctg} x\right)^2}$$

G.7.1.n) $f': D \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{\left(27x^8 - 5\cdot 9^x \ln 9\right)\cdot\left(x\sqrt{x} + 6\sin x\right) - \left(3x^9 - 5\cdot 9^x\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 6\cos x\right)}{\left(x\sqrt{x} + 6\sin x\right)^2}$$

G.7.1.o) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = \cos\left(3x^2 - 5x + 7\right)\cdot(6x - 5)$

G.7.1.p) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 6\left(\sin\left(3x^2 - 5x + 7\right)\right)^5 \cdot \cos\left(3x^2 - 5x + 7\right)\cdot(6x - 5)$

G.7.1.q) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = \dfrac{6\left(\sin\left(3x^2 - 5x + 7\right)\right)^5 \cdot \cos\left(3x^2 - 5x + 7\right)\cdot(6x - 5)}{\sin^6\left(3x^2 - 5x + 7\right)\cdot \ln 4}$

G.7.1.r) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = -\sin\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 18x^2\right)$

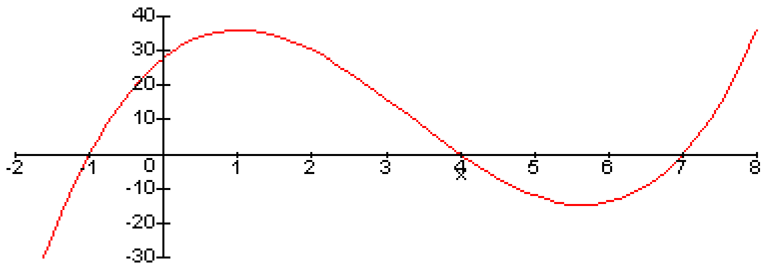
G.7.1.s) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 7\left(\cos\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\right)^6 \cdot \left(-\sin\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\right)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 18x^2\right)$

G.7.1.t) $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = \dfrac{7\left(\cos\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\right)^6 \cdot \left(-\sin\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)\right)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 18x^2\right)}{\cos^7\left(4\sqrt{x} + 6x^3\right)}$

G.7.2.a) A függvény zérushelyei: $x = -1$, $x = 4$, $x = 7$.

A függvény első deriváltja: $f': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 20x + 17$, ennek zérushelyei: $x = 1$ és $x = \dfrac{17}{3}$. Az $x = 1$ lokális maximum pont, $f(1) = 36$; az $x = \dfrac{17}{3} \approx 5{,}6667$ lokális minimum pont, $f\left(\dfrac{17}{3}\right) = -\dfrac{400}{27} \approx -14{,}8148$.

A függvény második deriváltja: $f'': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 6x - 20$, ennek zérushelye: $x = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3333$, amely inflexiós pont és $f\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{286}{27} \approx 10{,}5926$.
A függvény grafikonja:

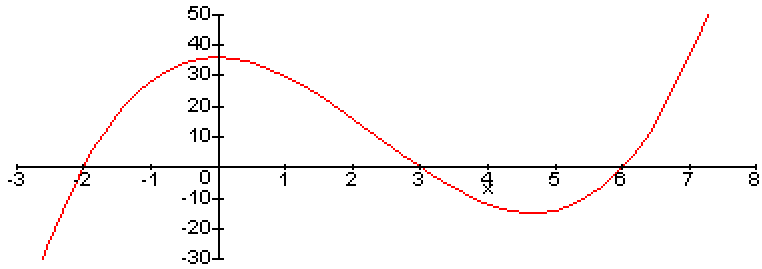


G.7.2.b) A függvény zérushelyei: $x = -2$, $x = 3$, $x = 6$.

A függvény első deriváltja: $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 14x$, ennek zérushelyei: $x = 0$ és $x = \frac{14}{3}$. Az $x = 0$ lokális maximum pont, $f(0) = 36$; az $x = \frac{14}{3} \approx 4{,}6667$ lokális minimum pont, $f\left(\frac{14}{3}\right) = -\frac{400}{27} \approx -14{,}8148$.

A függvény második deriváltja: $f'' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 6x - 14$, ennek zérushelye: $x = \frac{7}{3} \approx 2{,}3333$, amely inflexiós pont és $f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{286}{27} \approx 10{,}5926$.

A függvény grafikonja:

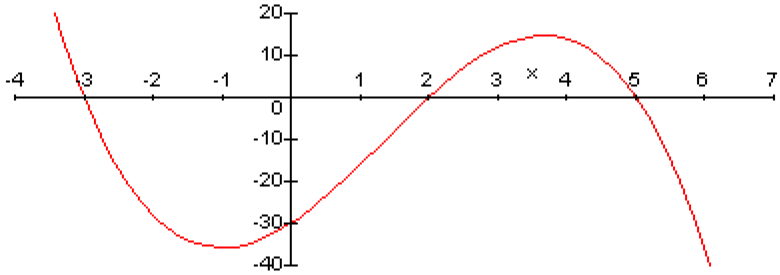


G.7.2.c) A függvény zérushelyei: $x = -3$, $x = 2$, $x = 5$.

A függvény első deriváltja: $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 8x + 11$, ennek zérushelyei: $x = -1$ és $x = \frac{11}{3}$. Az $x = -1$ lokális minimum pont, $f(-1) = -36$; az $x = \frac{11}{3} \approx 3{,}6667$ lokális maximum pont, $f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{400}{27} \approx 14{,}8148$.

A függvény második deriváltja: $f'': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f''(x) = -6x + 8$, ennek zérushelye: $x = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$, amely inflexiós pont és $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{286}{27} \approx -10{,}5926$.

A függvény grafikonja:

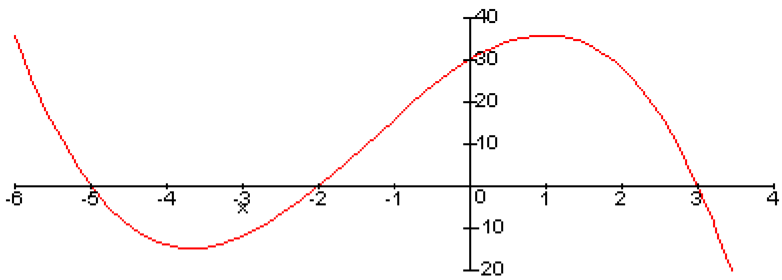


G.7.2.d) A függvény zérushelyei: $x = -5$, $x = -2$, $x = 3$.

A függvény első deriváltja: $f': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 - 8x + 11$, ennek zérushelyei: $x = -\frac{11}{3}$ és $x = 1$. Az $x = -\frac{11}{3} \approx -3{,}6667$ lokális minimum pont, $f\left(-\frac{11}{3}\right) = -\frac{400}{27} \approx -14{,}8148$; az $x = 1$ lokális maximum pont, $f(1) = 36$.

A függvény második deriváltja: $f'': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f''(x) = -6x - 8$, ennek zérushelye: $x = -\frac{4}{3} \approx -1{,}3333$, amely inflexiós pont és $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{286}{27} \approx 10{,}5926$.

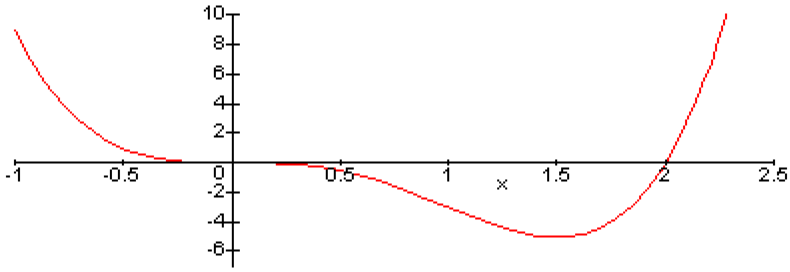
A függvény grafikonja:



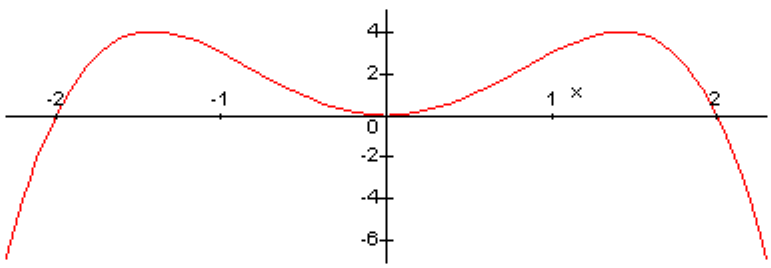
G.7.2.e) A függvény zérushelyei: $x = 0$ és $x = 2$. A függvény első deriváltja: $f': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 12x^3 - 18x^2$, ennek zérushelyei: $x = 0$ és $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Az

$x=\frac{3}{2}$ lokális (és egyben abszolút) minimum pont, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-5{,}0625$. Az $x=0$ nem lokális szélsőértékhely, mivel ebben a pontban f' nem vált előjelet.

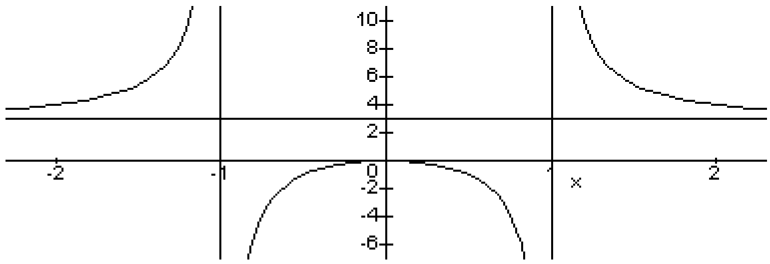
A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=36x^2-36x$, ennek zérushelyei: $x=0$ és $x=1$. Mindkét pont inflexiós pont, $f(0)=0$ és $f(1)=-3$. A függvény grafikonja:



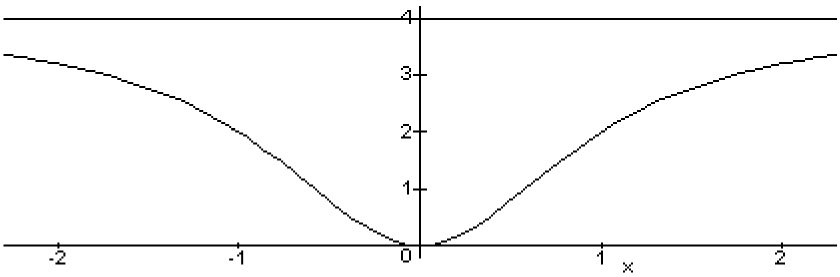
G.7.2.f) A függvény zérushelyei: $x=-2$, $x=0$ és $x=2$. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=8x-4x^3$, ennek zérushelyei: $x=-\sqrt{2}$, $x=0$ és $x=\sqrt{2}$. Az $x=0$ lokális minimumpont, $f(0)=0$. Az $x=-\sqrt{2}$ és az $x=\sqrt{2}$ lokális maximumpont, $f\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=4$. Ezek egyben abszolút maximumpontok is. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=8-12x^2$, ennek zérushelyei: $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ és $x=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0{,}8165$. Mindkét pont inflexiós pont, $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{20}{9}\approx 2{,}2222$. Páros függvény. Íme a függvény grafikonja:



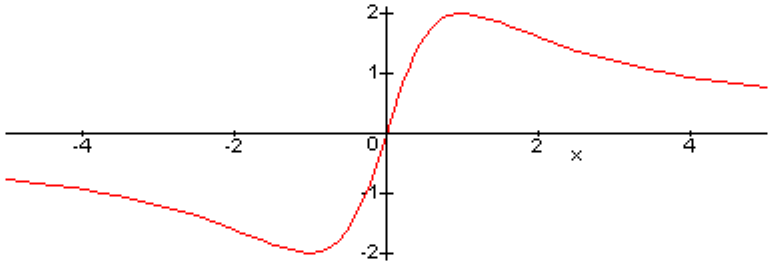
G.7.2.g) A függvény zérushelye: $x=0$, póluspontjai: $x=-1$ és $x=1$ – függőleges aszimptoták. A függvény első deriváltja: $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$. Ennek zérushelye $x=0$, amely lokális maximumpont. A függvény második deriváltja: $f'':D\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\frac{18x^2+6}{\left(x^2-1\right)^3}$. Ennek nincsenek zérushelyei, így a függvénynek nincs inflexiós pontja. Az $y=3$ egyenes – vízszintes aszimptota. Páros függvény. Íme a függvény grafikonja:



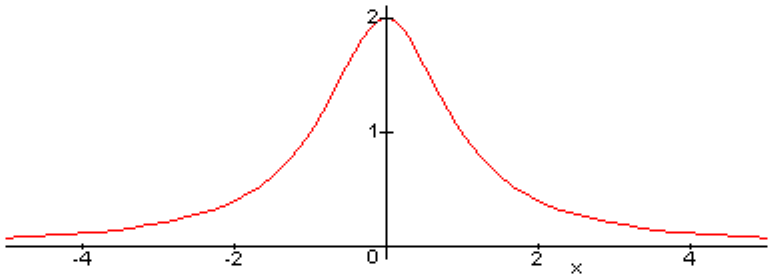
G.7.2.h) A függvény zérushelye: $x=0$. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ennek zérushelye $x=0$, amely lokális és egyben abszolút minimumpont. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\frac{8-24x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$, ennek zérushelyei: $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5773$, amelyek inflexiós pontok, továbbá $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1$. Az $y=4$ egyenes – vízszintes aszimptota. Páros függvény. Íme a függvény grafikonja:



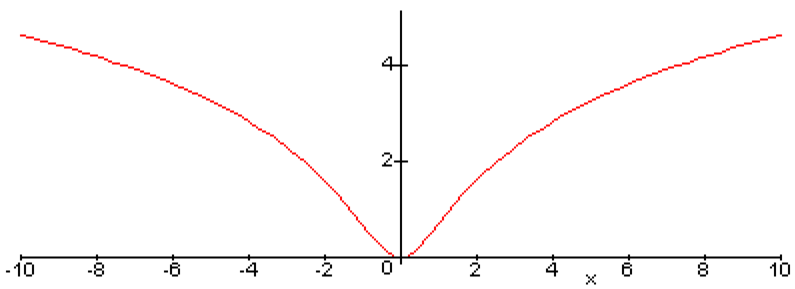
G.7.2.i) A függvény zérushelye: $x=0$. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=4\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ennek zérushelye $x=-1$ és $x=1$. Az $x=-1$ lokális és abszolút minimumpont, $f(-1)=-2$. Az $x=1$ lokális és egyben abszolút maximumpont, $f(1)=2$. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\frac{8x^3-24x}{\left(x^2+1\right)^3}$, ennek zérushelyei: $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ és $x=\sqrt{3}\approx 1{,}7321$. Ezek mind inflexiós pontok, $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}$ és $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$. Az x tengely – vízszintes aszimptota. Páratlan függvény, íme a grafikonja:



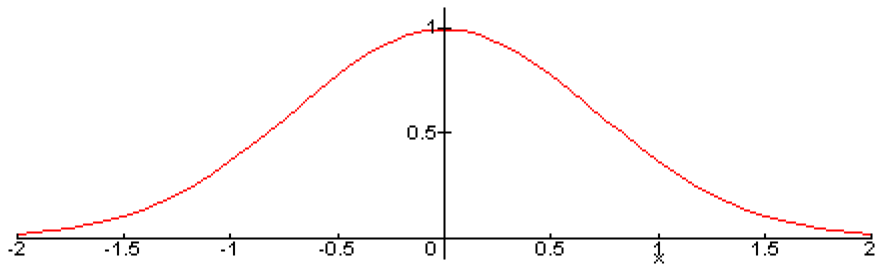
G.7.2.j) A függvénynek nincs zérushelye. Az x tengely – vízszintes aszimptota. Páros függvény. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ennek zérushelye $x=0$, amely abszolút maximumpont, $f(0)=2$. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\dfrac{12x^2-4}{\left(x^2+1\right)^3}$, ennek zérushelyei: $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5773$, amelyek inflexiós pontok, továbbá $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$. A függvény grafikonja:



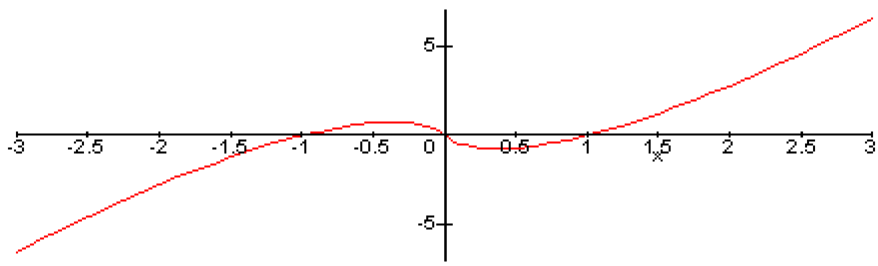
G.7.2.k) A függvény zérushelye: $x=0$. Páros függvény. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Ennek zérushelye $x=0$, amely abszolút minimumpont. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, ennek zérushelyei: $x=-1$ és $x=1$, amelyek inflexiós pontok, továbbá $f(-1)=f(1)=\ln 2\approx 0{,}6931$. A függvény grafikonja:



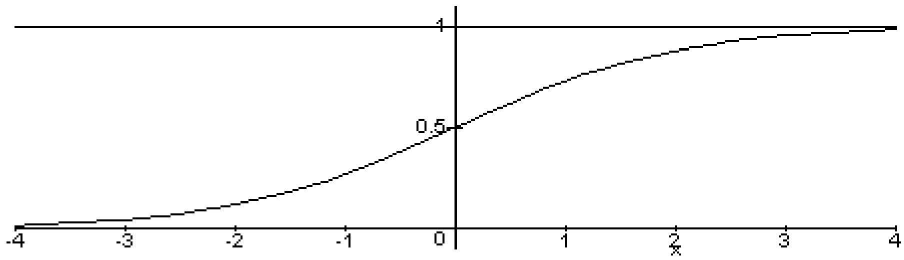
G.7.2.l) A függvénynek nincs zérushelye. Az x tengely – vízszintes aszimptota. Páros függvény. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$, ennek zérushelye: $x=0$, ami abszolút maximumpont, továbbá $f(0)=1$. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}$, ennek zérushelyei: $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7071$, amelyek inflexiós pontok, továbbá $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}6065$. A függvény grafikonja (amelyet Gauss-féle harang-görbének is szokták nevezni):



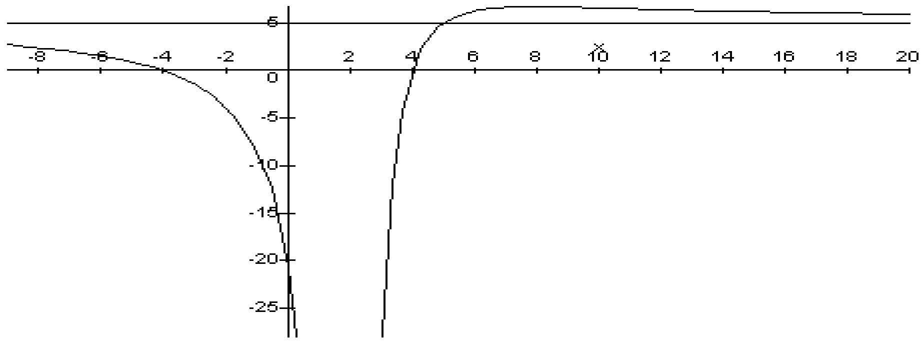
G.7.2.m) A függvény zérushelye: $x=-1$ és $x=1$. A függvény első deriváltja: $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=2+\ln x^2$, ennek zérushelyei: $x=-e^{-1}$ és $x=e^{-1}\approx 0{,}3679$. Az $x=-e^{-1}$ lokális maximumpont és $f\left(-e^{-1}\right)=2e^{-1}\approx 0{,}7358$. Az $x=e^{-1}$ lokális minimumpont és $f\left(e^{-1}\right)=-2e^{-1}\approx -0{,}7358$. A függvény második deriváltja: $f'':D\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\frac{2}{x}$, ami sehol sem nulla, így a függvénynek nincs inflexiós pontja. Páratlan függvény, íme a grafikonja:



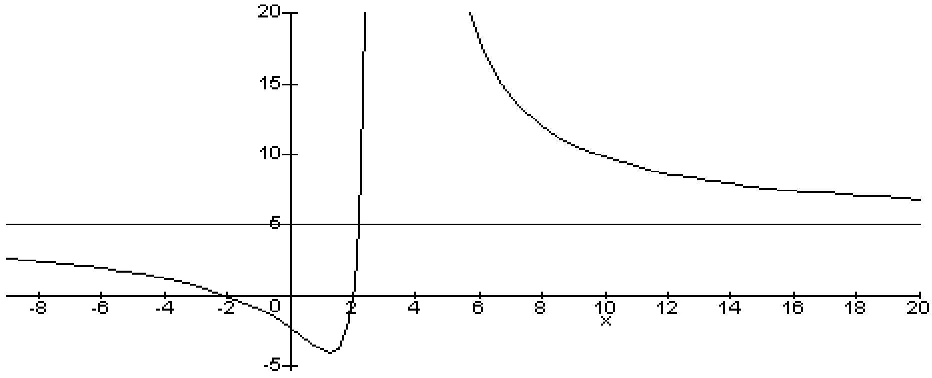
G.7.2.n) A függvénynek nincs zérushelye. Van két vízszintes aszimptotája: az x tengely és az $y=1$ egyenes. A függvény első deriváltja: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$, amelynek nincs zérushelye. A függvény második deriváltja: $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f''(x)=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$. Ennek zérushelye $x=0$, ami inflexiós pont és $f(0)=0{,}5$. Íme a függvény grafikonja:



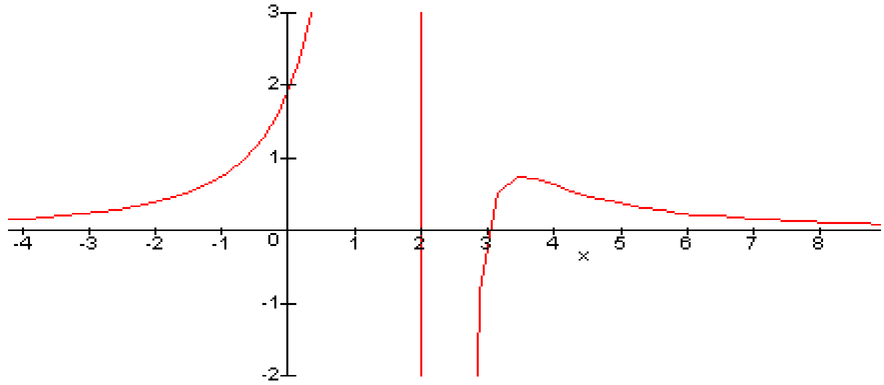
G.7.2.o) A függvény zérushelye: $x = -4$ és $x = 4$, póluspontja $x = 2$. Vízszintes aszimtotája az $y = 5$ egyenes. A függvény első deriváltja: $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 20\dfrac{8-x}{(x-2)^3}$, amelynek zérushelye $x = 8$ abszolút maximumpont, $f(8) = \dfrac{20}{3} \approx 6{,}6667$. A függvény második deriváltja: $f'': D \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 40\dfrac{x-11}{(x-2)^4}$. Ennek zérushelye $x = 11$ – inflexiós pont és $f(11) = \dfrac{175}{27} \approx 6{,}4815$. A függvény grafikonja:



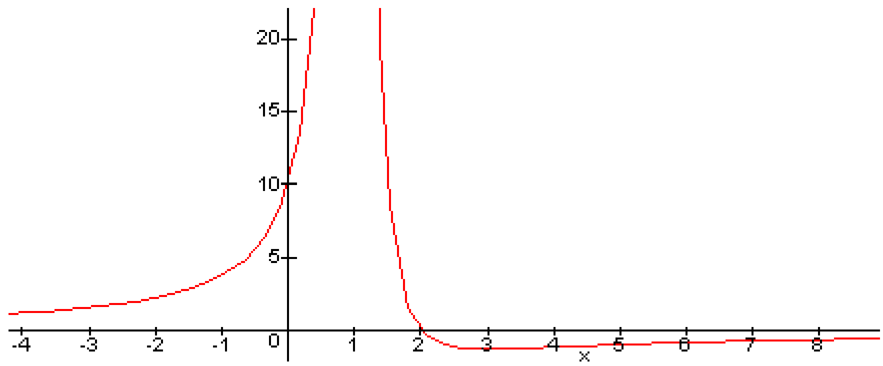
G.7.2.p) A függvény zérushelye: $x = -2$ és $x = 2$, póluspontja $x = 3$. Vízszintes aszimtotája az $y = 5$ egyenes. A függvény első deriváltja: $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 10\dfrac{4-3x}{(x-3)^3}$, amelynek zérushelye $x = \dfrac{4}{3}$ abszolút minimumpont, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = -4$. A függvény második deriváltja: $f'': D \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 30\dfrac{2x-1}{(x-3)^4}$. Ennek zérushelye $x = \dfrac{1}{2}$ – inflexiós pont és $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3$. A függvény grafikonja:



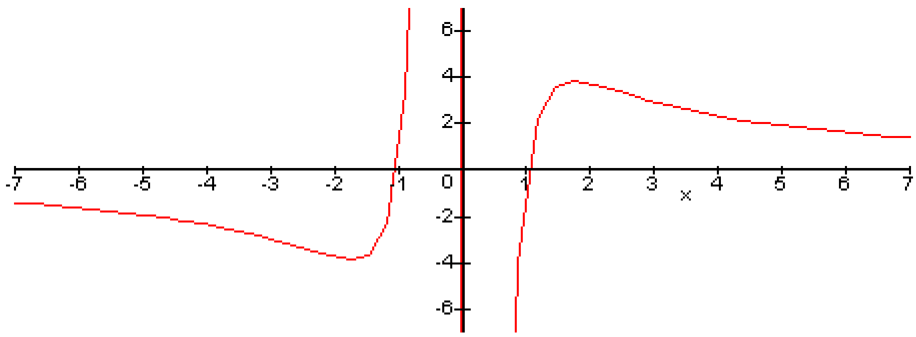
G.7.2.q) A függvény zérushelye $x=3$ és póluspontja $x=2$. Vízszintes aszimtotája az x tengely. A függvény első deriváltja: $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=5\dfrac{7-2x}{(x-2)^4}$, amelynek zérushelye $x=\dfrac{7}{2}$ lokális maximumpont, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{20}{27}\approx 0{,}7407$. A függvény második deriváltja: $f'':D\to\mathbf{R}$, $f''(x)=30\dfrac{x-4}{(x-2)^5}$. Ennek zérushelye $x=4$ – inflexiós pont és $f(4)=\dfrac{5}{8}=0{,}625$. A függvény grafikonja:



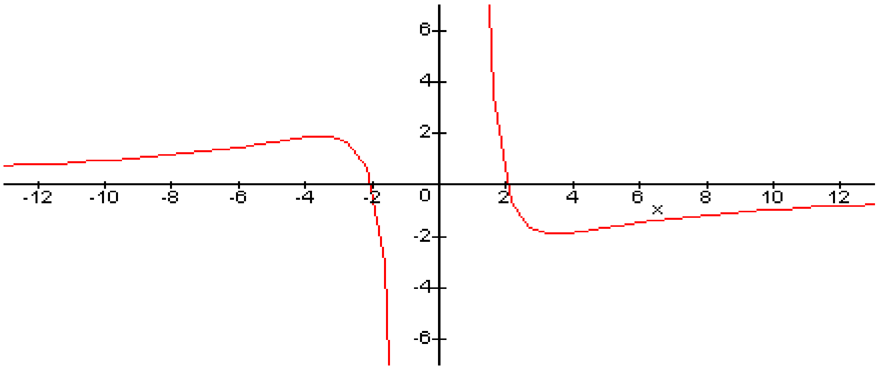
G.7.2.r) A függvény zérushelye $x=2$ és póluspontja $x=1$. Vízszintes aszimtotája az x tengely. A függvény első deriváltja: $f':D\to\mathbf{R}$, $f'(x)=5\dfrac{x-3}{(x-1)^3}$, amelynek zérushelye $x=3$ abszolút minimumpont, $f(3)=-\dfrac{5}{4}=-1{,}25$. A függvény második deriváltja: $f'':D\to\mathbf{R}$, $f''(x)=10\dfrac{4-x}{(x-1)^4}$. Ennek zérushelye $x=4$ – inflexiós pont és $f(4)=-\dfrac{10}{9}\approx -1{,}1111$. A függvény grafikonja:



G.7.2.s) A függvény zérushelye: $x = -1$ és $x = 1$, póluspontja $x = 0$. Vízszintes aszimtotája az x tengely. A függvény első deriváltja: $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 10\dfrac{3 - x^2}{x^4}$, amelynek zérushelyei $x = -\sqrt{3}$ és $x = \sqrt{3}$. Az $x = -\sqrt{3}$ lokális minimumpont, $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{20}{9}\sqrt{3} \approx -3{,}849$. Az $x = \sqrt{3}$ lokális maximumpont, $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{20}{9}\sqrt{3} \approx 3{,}849$. A függvény második deriváltja: $f'': D \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 20\dfrac{x^2 - 6}{x^5}$, amelynek zérushelyei $x = -\sqrt{6}$ és $x = \sqrt{6}$ inflexiós pontok. $f\left(-\sqrt{6}\right) = -\dfrac{25}{18}\sqrt{6} \approx -3{,}402$ és $f\left(\sqrt{6}\right) = \dfrac{25}{18}\sqrt{6} \approx 3{,}402$
Páratlan függvény, íme a grafikonja:

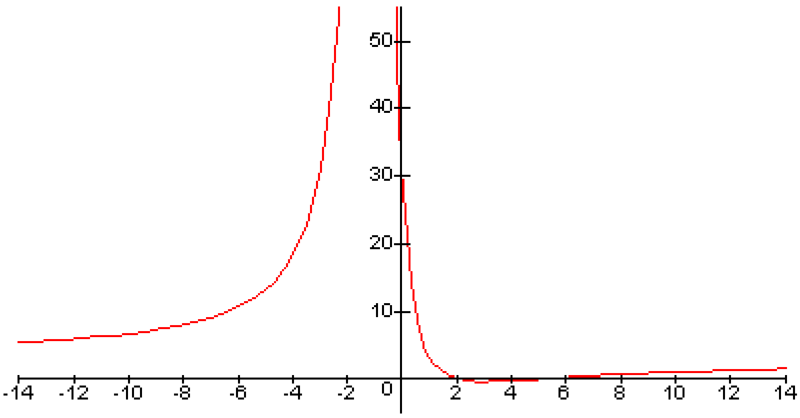


G.7.2.t) A függvény zérushelye: $x = -2$ és $x = 2$, póluspontja $x = 0$. Vízszintes aszimtotája az x tengely. A függvény első deriváltja: $f': D \to \mathbf{R}$, $f'(x) = 10\dfrac{x^2 - 12}{x^4}$, amelynek zérushelyei $x = -2\sqrt{3}$ és $x = 2\sqrt{3}$. Az $x = -2\sqrt{3}$ lokális maximumpont, $f\left(-2\sqrt{3}\right) = \dfrac{10}{9}\sqrt{3} \approx 1{,}9245$. Az $x = 2\sqrt{3}$ lokális minimumpont, $f\left(2\sqrt{3}\right) = -\dfrac{10}{9}\sqrt{3} \approx -1{,}9245$. A függvény második deriváltja: $f'': D \to \mathbf{R}$, $f''(x) = 20\dfrac{24 - x^2}{x^5}$, amelynek zérushelyei $x = -2\sqrt{6}$ és $x = 2\sqrt{6}$ inflexiós pontok. $f\left(-2\sqrt{6}\right) = \dfrac{25}{36}\sqrt{6} \approx 1{,}701$ és $f\left(2\sqrt{6}\right) = -\dfrac{25}{36}\sqrt{6} \approx -1{,}701$ Páratlan függvény, íme a grafikonja:



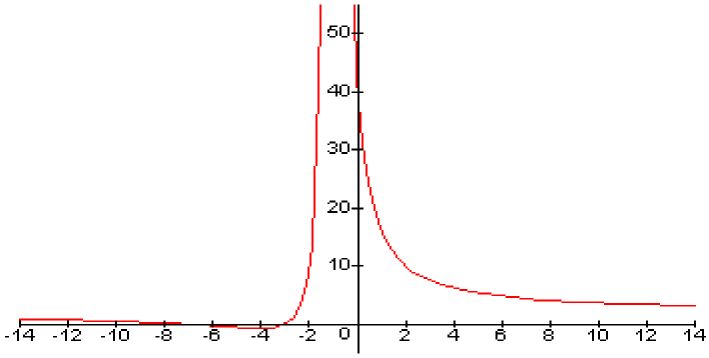
G.7.2.u) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 21x + 30}{x^2 + 2x + 1}$

$$f'(x) = 27\frac{x-3}{(x+1)^3} \qquad f''(x) = -54\frac{x-5}{(x+1)^4}$$



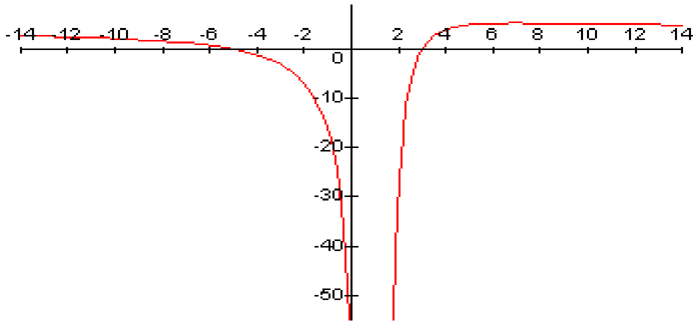
G.7.2.v) f: $\mathbf{R}\backslash\{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 20x + 42}{x^2 + 2x + 1}$

$$f'(x) = -16\frac{x+4}{(x+1)^3} \qquad f''(x) = 16\frac{2x+11}{(x+1)^4}$$



G.7.2.w) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{4x^2 + 8x - 60}{x^2 - 2x + 1}$

$$f'(x) = -16\frac{x-7}{(x-1)^3} \qquad f''(x) = 32\frac{x-10}{(x-1)^4}$$



A 8. fejezet gyakorló feladatainak megoldása

G.8.1.a) $\int f(x)dx = 3\sin x - 7\dfrac{x^4}{4} + 9x + C$

G.8.1.b) $\int f(x)dx = -4\cos x - 5\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6\,\mathrm{tg}\,x + C$

G.8.1.c) $\int f(x)dx = 7\cdot\dfrac{5^x}{\ln 5} - 5\cdot\dfrac{x^8}{8} - 4\,\mathrm{ctg}\,x + C$

G.8.1.d) $\int f(x)dx = 8\cdot e^x - 7\cdot\dfrac{1}{-2x^2} + 6\ln x - x\cdot\cos 3 + C$

G.8.1.e) $\int f(x)dx = 2\cdot\dfrac{x^{11}}{11} + 3\,\mathrm{ctg}\,x + 5\sqrt{x} - 6\sin x + C$

G.8.1.f) $\int f(x)dx = \int\left(\frac{3}{9}x^2 - \frac{4}{9} + \frac{5}{9x} - \frac{7}{9x^2}\right)dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{9}\ln x + \frac{7}{9x} + C$

G.8.1.g) $\int f(x)dx = 3\cdot e^x - 4\cdot\frac{x^{1+e}}{1+e} - 6x + 5\,\mathrm{tg}\,\mathrm{x} + \mathrm{C}$

G.8.1.h) $\int f(x)dx = -9\cos x - 7\cdot\frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} - 5\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$

G.8.1.i) $\int f(x)dx = 3\cdot\frac{\sin(5x-2)}{5} + 4\cdot\frac{(7x-6)^3}{3}\cdot\frac{1}{7} + C$

G.8.1.j) $\int f(x)dx = 7\cdot\frac{-\cos(3x+4)}{3} + 5\cdot\ln(6x-9)\cdot\frac{1}{6} + C$

G.8.1.k) $\int f(x)dx = 3\cdot\frac{5^{2x+4}}{2}\ln 5 - 6\cdot\mathrm{tg}\,(7x+8)\cdot\frac{1}{7} + C$

G.8.1.l) $\int f(x)dx = 3\cdot\frac{(4x+5)^{11}}{11}\cdot\frac{1}{4} + 7\cdot\mathrm{ctg}\,(9x-4)\cdot\frac{1}{9} + C$

G.8.1.m) $\int f(x)dx = \sin\left(5x^2 - 2x + 3\right) + C$

G.8.1.n) $\int f(x)dx = 2\cdot\ln\left(4x^3 - 5x^2 + 3x - 2\right) + C$

G.8.1.o) $\int f(x)dx = 9x^2 + 48x + 146\ln(x-3) + C$

G.8.1.p) $\int f(x)dx = x^3 + x - \ln(3x-2) + C$

G.8.1.q) $\int f(x)dx = 2x^3 - 8x^2 + 35x - 72\ln(x+2) + C$

G.8.1.r) $\int f(x)dx = 3x^3 + 11x^2 + 73x + 213\ln(x-3) + C$

G.8.1.s) $\int f(x)dx = \frac{7}{9}\sin(3x-4) + \left(-\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}\right)\cos(3x-4) + C$

G.8.1.t) $\int f(x)dx = 2\sin(3x+7) + \left(-6x-2\right)\cos(3x+7) + C$

G.8.1.u) $\int f(x)dx = \sin(5x+2) + \left(-5x+3\right)\cos(5x+2) + C$

G.8.1.v) $\int f(x)dx = \frac{3}{49}\sin(7x+9) + \left(-\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}\right)\cos(7x+9) + C$

G.8.1.w) $\int f(x)dx = \frac{5}{49}\cos(7x+4) + \left(\frac{5}{7}x + \frac{9}{7}\right)\sin(7x+4) + C$

G.8.1.x) $\int f(x)dx = \cos(3x-5) + (3x-2)\sin(3x-5) + C$

G.8.1.y) $\int f(x)dx = \frac{8}{25}\cos(5x-6) + \left(\frac{8}{5}x - \frac{7}{5}\right)\sin(5x-6) + C$

G.8.1.z) $\int f(x)dx = 3\cos(2x+7) + (6x-5)\sin(2x+7) + C$

G.8.2.a) $\int f(x)dx = \left(\frac{7}{3}x - \frac{22}{9}\right)\cdot e^{3x+2} + C$

G.8.2.b) $\int f(x)dx = (6x-7)\cdot e^{2x-5} + C$

G.8.2.c) $\int f(x)dx = \left(\frac{12x+6}{\ln 2} - \frac{12}{(\ln 2)^2}\right)\cdot 2^x + C$

G.8.2.d) $\int f(x)dx = \left(\frac{5x+7}{\ln 3} - \frac{5}{(\ln 3)^2}\right)\cdot 3^x + C$

G.8.2.e) $\int f(x)dx = \left(\frac{5}{2}x^2 + 7x + \frac{32}{9}\right)\cdot \ln(3x+2) - \frac{5}{4}x^2 - \frac{16}{3}x - 3 + C$

G.8.2.f) $\int f(x)dx = (9x^2 + 6x - 35)\cdot \ln(3x-5) - \frac{9}{2}x^2 - 21x + \frac{95}{2} + C$

G.8.2.g) $\int f(x)dx = \left(x^2 + 3x - \frac{154}{25}\right)\cdot \ln(5x-7) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{22}{5}x + \frac{357}{50} + C$

G.8.2.h) $\int f(x)dx = \left(\frac{7}{2}x^2 - 4x - \frac{295}{18}\right)\cdot \ln(3x+5) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{59}{6}x + \frac{85}{4} + C$

G.8.2.i) $\int f(x)dx = \left(-\frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{27}\right)\cos(3x+5) + \left(\frac{14}{9}x - \frac{4}{9}\right)\sin(3x+5) + C$

G.8.2.j) $\int f(x)dx = (-3x^2 + 2x - 1)\cos(3x-2) + \left(2x - \frac{2}{3}\right)\sin(3x-2) + C$

G.8.2.k) $\int f(x)dx = (-3x^2 + 2x)\cos(2x+7) + (3x-1)\sin(2x+7) + C$

G.8.2.l) $\int f(x)dx = (-5x^2 + 3x - 1)\cos(5x-3) + \left(2x - \frac{3}{5}\right)\sin(5x-3) + C$

G.8.2.m) $\int f(x)dx = \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{144}{125}\right)\sin(5x-4) + \left(\frac{6}{25}x - \frac{4}{25}\right)\cos(5x-4) + C$

G.8.2.n) $\int f(x)dx = \left(4x^2 - 3x + \frac{7}{9}\right)\sin(3x+5) + \left(\frac{8}{3}x - 1\right)\cos(3x+5) + C$

G.8.2.o) $\int f(x)dx = \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{98}{125}\right)\sin(5x+3) + \left(\frac{2}{25}x + \frac{2}{25}\right)\cos(5x+3) + C$

G.8.2.p) $\int f(x)dx = (12x^2 + 6x - 2)\sin(2x-7) + (12x+3)\cos(2x-7) + C$

G.8.2.q) $\int f(x)dx = (5x^2 - 3x + 6)\cdot e^x + C$

G.8.2.r) $\int f(x)dx = (9x^2 + 5x - 2)\cdot e^x + C$

G.8.2.s) $\int f(x)dx = (3x^2 - 13x + 21)\cdot e^x + C$

G.8.2.t) $\int f(x)dx = (13x^2 - 43x + 54)\cdot e^x + C$

G.8.2.u) $\int f(x)dx = (7x^3 - 16x^2 + 35x - 33)\cdot e^x + C$

G.8.2.v) $\int f(x)dx = (8x^3 - 30x^2 + 64x - 71)\cdot e^x + C$

G.8.2.w) $\int f(x)dx = (11x^3 - 20x^2 + 57x - 38)\cdot e^x + C$

G.8.2.x) $\int f(x)dx = (6x^3 - 23x^2 + 55x - 59)\cdot e^x + C$

G.8.3.a) $\int_1^5 f(x)dx = 192 - 7\ln 5 \approx 180{,}7339$

G.8.3.b) $\int_1^5 f(x)dx = 556 + 9\ln 5 \approx 570{,}4849$

G.8.3.c) $\int_2^5 f(x)dx = 519 - 7\ln 5 + 7\ln 2 \approx 512{,}58596$

G.8.3.d) $\int_2^5 f(x)dx = 483 + 13\ln 5 - 13\ln 2 \approx 494{,}9118$

G.8.3.e) $\int_2^5 f(x)dx = \frac{13209}{2} + 13\ln 5 - 13\ln 2 \approx 6616{,}4118$

G.8.3.f) $\int_1^7 f(x)dx = 1074 + 13\ln 7 \approx 1099{,}2968$

G.8.3.g) $\int_1^7 f(x)dx = 702 + 8\ln 7 \approx 717{,}5673$

G.8.3.h) $\int_1^7 f(x)dx = 1422 + 3\ln 7 \approx 1427{,}8377$

G.8.3.i) $\int_1^4 f(x)dx = 155 + 12\ln 2 \approx 163{,}3178$

G.8.3.j) $\int_1^4 f(x)dx = 243 - 14\ln 2 \approx 233{,}2959$

G.8.4.a) $\int \frac{8x-5}{6x-9}dx = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\ln(6x-9) + C$

G.8.4.b) $\int \frac{2x+5}{6x+7}dx = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\ln(18x+21) + C$

G.8.4.c) $\int \frac{2x^3+7x^2-2x-3}{x+4}dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 11\ln(x+4) + C$

G.8.4.d) $\int \frac{5x^3+5x^2+8x-7}{x-6}dx = \frac{5}{3}x^3 + \frac{35}{2}x^2 + 218x + 1301\ln(x-6) + C$

G.8.4.e) $\int (2x+9)\sin(3x+6)dx = \frac{2}{9}\sin(3x+6) - \frac{2}{3}x\cos(3x+6) - 3\cos(3x+6) + C$

G.8.4.f) $\int (9x+5)\sin(8x-6)dx = \frac{9}{64}\sin(8x-6) - \frac{9}{8}x\cos(8x-6) - \frac{5}{8}3\cos(8x-6) + C$

G.8.4.g) $\int \sin(9x-4)e^{8x+2}dx = -\frac{9}{145}e^{8x+2}\cos(9x-4) - \frac{8}{145}e^{8x+2}\sin(9x-4) + C$

G.8.4.h) $\int \sin(7x+4)e^{9x+8}dx = -\frac{7}{130}e^{9x+8}\cos(7x+4) + \frac{9}{130}e^{9x+8}\sin(7x+4) + C$

G.8.4.i) $\int_1^5 \left(6x^2 - 6x + 4 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)dx = 188 - 2\ln(5)$

G.8.4.j) $\int_1^4 \left(9x^2 + 3x + 3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = 222 - 14\ln(2)$

Felhasznált irodalom

[1] Brealey, Richard; Myers, Stewart C.: *Modern vállalati pénzügyek,* Panem Kft. Budapest 1994.

[2] Dr. Csernyák László: *Analízis,* Matematika a közgazdasági alapképzés számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 2006.

[3] Lengyel Imre, Szakács Attila: *Gazdaságmatematikai és statisztikai szakszótár,* EKTF Líceum Kiadó, Eger 2000.

[4] Sydsaeter, Knut; Hammond, Peter: *Matematika közgazdászoknak,* Aula, Budapest 1998.